T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANALİTİK ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ ve MODÜLER FONKSİYONLARA UYGULANMASI

İlker İNAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA - 2005

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmada örtü uzayları, analitik örtü uzayları, modüler fonksiyon ve modüler fonksiyonun örtü dönüşümlerine uygulamaları ele alınmıştır.

Birinci bölümde ilerideki bölümlere hazırlık olması amacıyla bazı temel kavramlar tanıtılmıştır. Ayrıca ikinci ve üçüncü bölümdeki teoremlerin ispatlarında kullanılmak üzere bazı önemli teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

İkinci bölüme örtü dönüşümü yardımıyla elde edilen örtü uzayları tanıtılarak başlanmıştır. Ardından örtü uzaylarının önemli bir özelliği olan, örtülen uzaydaki her bir eğrinin örtü uzayındaki bir eğriye yükseltilebilmesi özelliği ve bunun sonuçları ele alınmıştır. Bunun yanı sıra son olarak, bu bölümde analitik örtü dönüşümleri ve analitik örtü uzayları kavramları incelenmiştir. Burada evrensel örtü uzayı tanımlanmış ve bunun çok önemli sonuçları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle modüler grup ve bunun bir elemanı olan modüler fonksiyon tanıtılmış ve örtü uzayları ile bağlantısı araştırılmıştır. Bunun sonucunda modüler fonksiyon yardımıyla üst yarı düzlemin, $\mathbb{C}_{0,1}$ in bir örtü uzayı olduğu elde edilmiştir. Ardından modüler fonksiyonun örtü uzaylarına bir uygulaması olarak üst yarı düzlemin bir döşemesi ele alınmıştır. Bunun yanı sıra C. E. Picard'a (1856-1941) ithaf edilen önemli iki teorem incelenmiştir. Son olarak evrensel analitik örtü uzaylarının varlığı hakkında gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Örtü dönüşümü, örtü uzayı, modüler grup, modüler fonksiyon, evrensel örtü uzayı, analitik örtü dönüşümü, analitik örtü uzayı, döşeme, evrensel analitik örtü uzayı, yükseltilme

ABSTRACT

Covering spaces, analytic covering spaces, modular function and applications of the modular function to covering maps are considered in this work, consisting of three sections.

In the first section some fundamental concepts are introduced for the next sections. In addition, some important theorems are given without proofs, to be used in the second and the third sections.

The second section begins with covering spaces which are obtained from covering maps. And then the fact that every path in the covered space can be lifted to a path in the covering space, which is an important feature of the covering spaces, is given. Finally in this section, analytic covering maps and anaytic covering spaces are examined. Here, the universal covering space is defined and its consequences which are very important are given.

In the third section, firstly modular group and a special element of it, the modular function, are introduced and the connection with covering spaces is investigated. As a consequence of this, the fact that upper half plane is the covering space of $\mathbb{C}_{0,1}$ is obtained. Then as an application of the modular function to covering maps, a tessellation of the upper half plane is considered. However two important theorems dedicated to C. E. Picard (1856-1941) are given. Lastly necessary and sufficient conditions for the existence of the universal analytic covering spaces are given.

Key Words: covering map, covering space, modular group, modular function, universal covering space, analytic covering map, analytic covering space, tessellation, universal analytic covering space, lifting

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(E, g) \sim (D, f)$	Analitik devam
$\mathcal{G}$	Analitik tohumların kümesi
$\mathcal{L}$	Alt yarı düzlem
$\mathbb{D}$	Birim disk
$(\boldsymbol{S}(G), \rho)$	Demet
(D, f)	Fonksiyon elemanı
$\tilde{\gamma}$	γ nın bir yükseltilmesi (lifting)
$n(\gamma; 0)$	γ nın orijini sarma sayısı
$Aut(G, \tau)$	(G, τ) nun tüm otomorfizmlerinin ailesi
$\mathbb{R}_\infty$	Genişletilmiş reel eksen
$\gamma \sim \sigma$	Homotopi
λ	Modüler fonksiyon
Γ	Modüler grup
τ	Örtü dönüşümü
$\mathbf{T}$	Tor yüzeyi
$[h]_z$	Tohum
$\mathbf{F}$	Temel bölge
$\mathcal{U}$	Üst yarı düzlem
(X, τ)	Y nin örtü uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ Sayfa

GİRİŞ

Örtü uzayları kavramı topoloji ile karmaşık fonksiyonlar teorisinin buluştuğu bir kavramdır. Sürekli ve bazı durumlarda analitik olan karmaşık fonksiyonlar yardımıyla, bağlantılı bir topolojik uzayın herhangi bir topolojik uzay üzerine belli koşullar altında resmedilmesi olan örtü uzayı kavramı 1900 lü yılların başında çalışılmaya başlanmıştır. Hem analizin hem de topolojinin bir araya geldiği bu kavram oldukça ilginç özellikler ve sonuçlar ortaya koymuştur. Çalışmanın amacı da bu özelliklerin ve sonuçların çalışılması ve bir araya getirilmesidir. Özellikle, örtü uzayları teorisinde önemli bir yer tutan bir eğrinin yükseltilmesi kavramının günümüzde uygulamalı matematik, mühendislik alanlarında kullanıldığı görülmektedir.

Bu çalışmada örtü uzayları ve özellikleri üzerinde durulduktan sonra en önemli ayrık grup olan modüler grup ve örtü uzayları arasındaki ilişki üzerinde durulmuştur. Modüler dönüşümler veya modüler fonksiyonların üst yarı düzlemin birer örtü dönüşümü olduğu dikkate alınarak üst yarı düzlemin örtü uzayı oluşturulmuştur. Bir uygulama olarak modüler grubun temel bölgesi yardımıyla üst yarı düzlemin bir döşemesi, yani bir bakıma özel bir örtüsü oluşturulmuştur.

Bu çalışmanın son kısmında, örtü uzayları yardımıyla elde edilen ve karmaşık fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutan Picard Teoremleri ele alınmıştır.

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel kavramlar tanımlanacak ve bu kavramların bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır.

1.1. Tanım. X boş olmayan herhangi bir küme, δ ise X in bazı alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer

i) ϕ, $X \in \delta$,

ii) A_1 ve $A_2 \in \delta$ olduğunda $A_1 \cap A_2 \in \delta$,

iii) I indis kümesi olmak üzere $A_i \in \tau$ olduğunda $\bigcup_{i \in I} A_i \in \delta$

şartları sağlanıyorsa δ ya X de bir topoloji; (X, δ) ikilisine de topolojik uzay denir.

X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere eğer X, ayrık ve açık kümelerin birleşimi cinsinden yazılamıyorsa X e bağlantılı topolojik uzay denir. X topolojik uzayının bağlantılı her alt kümesine X in bileşeni denir.

1.2. Tanım. (X, δ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay, $a \in X$ noktası ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin, $\mathcal{N}(a)$, a nın komşulukları sistemi olmak üzere, her bir $V \in \mathcal{N}(f(a))$ için $f(U) \subset V$ olacak şekilde en az bir $U \subset \mathcal{N}(a)$ bulunabiliyor ise f fonksiyonuna $a \in X$ noktasında süreklidir denir.

Örneğin, $(\mathbb{R}, \delta)$ alışılmış topolojik uzayında $f : X \to Y$, $f(x) = 2x$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

1.3. Tanım. X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere bire-bir, örten, kendisi ve tersi sürekli olan $f : X \to Y$ dönüşümüne X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik eşyapı dönüşümü) denir.

Örneğin, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha x$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

1.4. Tanım a) Z boştan farklı herhangi bir küme, $\boldsymbol{Y} = \{(Y_i, \delta_i) \mid i \in I\}$ topolojik uzay ailesi olsun. $\boldsymbol{G} = \{g_i \mid g_i : Y_i \to Z, i \in I\}$ fonksiyonlar ailesini göz önüne alalım. Her bir $i \in I$ için $\boldsymbol{G}$ fonksiyonlar ailesindeki tüm g_i fonksiyonlarını sürekli yapan $\boldsymbol{Z}$ kümesi üzerindeki en ince topolojiye tümel topoloji denir.

b) γ, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve p, X den X / γ üzerine doğal izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $\{X / \gamma, p\}$ ailesine karşılık gelen tümel topolojiye bölüm topolojisi denir ve bu topoloji δ_p ile gösterilir. $(X / \gamma, \delta_p)$ ikilisine (X, δ) nun γ ya göre bölüm uzayı denir.

Örneğin; $(\mathbb{R}, \delta)$ alışılmış topolojik uzayı verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(x, y) \in \gamma \Leftrightarrow (x \text{ ve } y \leq 0) \text{ veya } (x \text{ ve } y > 0)$$

şeklinde tanımlanan bir denklik bağıntısını ele alalım. $\mathbb{R} / \gamma = \{ [0], [1] \}$ bölüm kümesi üzerinde

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \gamma, x \mapsto p(x) = [x]$$

fonksiyonu ile üretilen bölüm topolojisi $\delta_p = \{ \phi, \mathbb{R} / \gamma, \{[1]\} \}$ dir. O halde $(\mathbb{R} / \gamma, \delta_p)$ bir bölüm uzayıdır.

1.5. Tanım a) X boştan farklı herhangi bir küme, $\boldsymbol{Y} = \{(Y_i, \sigma_i) \mid i \in I\}$ topolojik uzay ailesi olsun. $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \{ f_i : f_i : X \to Y_i, i \in I \}$ fonksiyonlar ailesini göz önüne alalım. Her $i \in I$ için $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ fonksiyonlar ailesindeki tüm f_i fonksiyonlarını sürekli yapabilen X kümesi üzerindeki en kaba topolojiye izdüşel topoloji denir.

b) $\boldsymbol{X} = \{(X_i, \delta) : i \in I\}$ topolojik uzaylar ailesi ve $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \prod X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots$ olsun. $\boldsymbol{P} = \{ \mathrm{P}_i : \mathrm{P}_i : X \to X_i, i \in I \}$ izdüşel fonksiyonlar ailesine karşılık gelen X kümesi üzerindeki izdüşel topolojiye çarpım topolojisi ve bu topoloji ile birlikte $\mathbf{X}$ topolojik uzayına çarpım uzayı denir.

Örneğin; $(\mathbb{R}, \delta)$ alışılmış topolojik uzayı verilsin. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi için

$$P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathrm{P}_1(x, y) = x \qquad\qquad P_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathrm{P}_2\,(x, y) = y$$

izdüşüm fonksiyonları yardımıyla $\mathbb{R}^2$ bir çarpım uzayı olur.

1.6. Tanım a) X herhangi bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $x \in U$, $y \in V$ özelliğindeki U ve V açık komşulukları için $U \cap V = \phi$ oluyorsa X uzayına Haussdorff uzayı denir.

b) X bir topolojik uzay olsun. Eğer

i) X bir Hausdorff uzayı,

ii) X in her bir açık alt kümesi $\mathbb{R}^n$ veya $\mathbb{R}$ nin bir açık alt kümesine homeomorf,

iii) X sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilirse

X uzayına bir n-manifold denir.

c) Bağlantılı 2-manifolda yüzey denir. Örneğin; $S^1 \times S^1$ çarpım uzayına izomorf olan **T** tor yüzeyi bir yüzeydir.

d) A herhangi bir küme ve $G_i \subset A$ olmak üzere $\Pi = \{G_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer A kümesi G_i kümelerinin birleşimi tarafından kapsanıyorsa, yani $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ oluyorsa Π ailesine A kümesinin bir örtüsü denir. Eğer her bir G_i açık küme ise Π ye A nın bir açık örtüsü denir.

e) S herhangi bir yüzey olmak üzere, eğer S nin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa S ye kompakt yüzey denir.

f) Kompakt, yönlendirilebilir her bir yüzey belli bir $g \geq 0$ tamsayısı için küreye g tane kulp takılarak elde edilen bir S_g yüzeyine homeomorftur, bu özellikteki g sayısına yüzeyin cinsi denir.

Örneğin **T** tor yüzeyinin cinsi 1 dir.

1.7. Tanım. X boş olmayan herhangi bir küme ve $\boldsymbol{P(X)}$, X in kuvvet kümesi olmak üzere $\tau = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}) = \{ T \mid T \subset X \}$ olsun. (X, τ) uzayına ayrık topolojik uzay, τ topolojisine ayrık topoloji denir.

1.8. Tanım. X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \to Y$ dönüşümü eğer açık (kapalı) kümeleri açık (kapalı) kümelere resmediyor ise f ye açık (kapalı) dönüşüm denir.

1.9. Tanım a) $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \Sigma$ Riemann küresi olmak üzere $f : \Sigma \to \Sigma$ rasyonel fonksiyonuna meromorf fonksiyon denir.

Örneğin; $f : \Sigma \to \Sigma,\ z \mapsto f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ fonksiyonu meromorf fonksiyondur.

b) $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere bir $f(z)$ fonksiyonu z nin herhangi bir U açık komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebilir ise f ye $z \in \mathbb{C}$ noktasında analitiktir (holomorftur) denir.

Örneğin; $f(z) = \sin z$ fonksiyonu analitik bir fonksiyondur.

Tüm $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemi üzerinde analitik olan fonksiyona tam (entire) fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z) = e^z$ üstel fonksiyonu tam fonksiyondur.

1.10. Teorem. (Liouville Teoremi) f tam fonksiyonu sınırlı ise sabittir. (Başkan 1998)

1.11. Tanım a) X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere,

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu; her $x, y, z \in X$ için

M1. $d(x, y) \geq 0$

M2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3. $d(x, y) = d(y, x)$

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği) koşullarını gerçekliyor ise d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik; (X, d) ikilisine ise metrik uzay denir.

b) (X, d) metrik uzay olsun. Eğer X deki her bir dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa (X, d) metrik uzayına kompakttır denir.

1.12. Teorem (Lebesgue Örtü Teoremi).(X, d) kompakt metrik uzay ve $i \in I$ için $\{U_i\}$ de X in bir açık örtüsü olsun. Bu takdirde her bir $x \in X$ için $B(x, r) \subseteq U_i$, $(i \in I)$ olacak şekilde bir tek pozitif r sayısı vardır. Bu özellikteki r sayısına örtünün Lebesgue sayısı denir. (Brown 1988)

1.13. Tanım. $\mathbb{C}$ nin basit bağlantılı açık alt kümelerine bölge denir.

1.14. Tanım. a) X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $f : [0, 1] \to X$ sürekli dönüşümüne X de bir eğri denir. $x \in X$ olmak üzere, başlangıç ve bitim noktası x olan eğriye X de kapalı bir eğri ya da x taban noktalı bir ilmik (loop) denir.

b) Kendi kendisini kesmeyen eğriye basit eğri denir.

c) B, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $\gamma_1 : [0, 1] \to B$, $\gamma_2 : [0, 1] \to B$ kapalı iki eğri olsun. Eğer

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \to B$$

fonksiyonu

i) Her bir $s \in [0, 1]$ için, $t \mapsto H(t, s)$ kapalı bir eğridir.

ii) $H(t, 0) = \gamma_1(t)$, $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ $\ 0 \le t \le 1$

koşullarını gerçekliyorsa γ_1 ve γ_2 eğrilerine birbirine homotopik eğridirler denir.

d) X bir topolojik uzay olsun. Eğer X içindeki her bir kapalı eğri X de bir noktaya homotopikse X e basit bağlantılı uzay denir.

e) Eğer $\gamma = \gamma(t)$ eğri fonksiyonu sınırlı değişimli, yani eğrinin boyu sonlu ise, γ eğrisine doğrultulabilir (rektifiye edilebilir) eğri denir.

f) x taban noktalı bir ilmiklerin kümesini $\pi(X, x)$ ile gösterelim. γ ve ρ, X topolojik uzayında $\gamma(1) = \rho(0)$ özelliğinde iki eğri olsun. Bu takdirde bu iki eğrinin çarpımı

$$(\gamma\rho)(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & , 0 \le s \le 1/2 \\ \rho(2s-1) & , 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve bu işlem yardımı ile $\pi(X, x)$ bir grup oluşturur. Bu gruba temel grup denir. (Jones ve Singerman 1987)

1.15. Tanım. B_0, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve f_0, B_0 üzerinde analitik bir fonksiyon olmak üzere (f_0, B_0) çiftine bir fonksiyon elemanı denir. B_1 bölgesi $B_0 \cap B_1 \neq \phi$ özelliğinde olmak üzere bir (f_1, B_1) bir fonksiyon elemanı için $B_0 \cap B_1$ üzerinde $f_0(z) = f_1(z)$ gerçekleniyorsa, $f_1(z)$ fonksiyonu $f_0(z)$ nin B_1 içine bir analitik devamıdır, denir.

1.16. Tanım. $\gamma : [0, b\,] \to \mathbb{C}$ bir eğri olmak üzere, tüm $0 \leq t \leq b$ değerleri için $\gamma(t)$ merkezli disklerde yakınsak olan

$$f(z, t) = \sum_0^\infty a_n (z - \gamma(t))^n$$

kuvvet serileri varsa ve

1) $f(z, 0) = f_0(z)$,
2) Her bir $s \in [0, b\,]$ için $|\, t - s \,| < \varepsilon$ koşulu altında $f(z, t), f(z, s)$ nin doğrudan analitik devamı olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa

f_0, γ eğrisi boyunca analitik olarak devam ettirilebiliyor denir. Bu durumda

$$\mathrm{F} = \{\, f(z, t) : 0 \leq t \leq b \,\}$$

fonksiyon ailesine, f_0 ın, γ eğrisi boyunca analitik devamı denir.

1.17. Tanım. $\mathfrak{F}$ sürekli fonksiyonların ailesi olsun. Eğer $\mathfrak{F}$ deki her bir fonksiyon dizisinin sürekli bir f fonksiyonuna yakınsayan bir alt dizisi varsa $\mathfrak{F}$ ye normal aile denir.

1.18. Tanım. γ, $\mathbb{C}$ de kapalı bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası γ eğrisi üzerinde bulunmasın. γ nın z_0 ı sarma sayısı $n(\gamma\,; 0)$ ile gösterilir ve

$$n(\gamma; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

olarak tanımlanır.

Örneğin; birim çemberin orjini sarma sayısı 1 dir.

1.19. Tanım. a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere,

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçiminde tanımlanmış fonksiyona Möbiüs dönüşümü denir.

1.20. Tanım a) B, $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin.

Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ eğrileri de w_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir.
b) İki bölgeden biri diğeri üzerine bire-bir konform olarak resmedilebiliyorsa bu iki bölge konform denktir denir.

1.21. Teorem. (Yönlendirme Prensibi) C_1 ve C_2, Σ da iki çember, M Möbiüs dönüşümü $M(C_1) = C_2$ özelliğinde olsun. Eğer C_1 için (z_1, z_2, z_3) yönlendirmesi varsa bu takdirde M dönüşümü C_1 çemberinin sağ ve sol yanlarını (Mz_1, Mz_2, Mz_3) yönlendirmesine göre C_2 çemberinin sağ ve sol yanlarına resmeder. □ (Conway 1995)

1.22. Tanım a) $a \in \Sigma$ için $\mathcal{F}_a$, a nın belli bir komşuluğunda analitik olan tüm fonksiyonların ailesi olsun.Eğer f, $g \in \mathcal{F}_a$ ise a nın belli bir komşuluğunda $f \equiv g$ oluyor ise $f \sim_a g$ yazılır. Bu bağıntı bir denklik bağıntısı olup $[f]_a$ ile gösterilen denklik sınıflarına f nin a daki tohumu denir.
b) $a \in \Sigma$ için tüm $[f]_a$ tohumlarının ailesine analitik fonksiyonların tohumlarının demetleri adı verilir.

2. BÖLÜM

ÖRTÜ UZAYLARI

Bu bölümde çalışmamızın temelini oluşturan örtü uzayı kavramını tanımlayacağız, örnekler vereceğiz ve örtü uzaylarının özellikleri üzerinde duracağız.

2.1. Örtü Uzayı

2.1.1. Tanım. X bağlantılı topolojik uzay ve Y herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $\tau : X \to Y$ üzerine fonksiyonu sürekli olsun. Eğer her bir $\omega \in Y$ için $\tau^{-1}(\Delta)$ nın her bir bileşeni açık olacak biçimde ω nın bir Δ komşuluğu var ve üstelik τ, bu bileşenlerin her birisini Δ üzerine homeomorf olarak resmediyor ise (X, τ) ikilisine Y nin bir *örtü uzayı* denir.

Bu şekildeki Δ açık kümelerine de *temel komşuluk* denir.

2.1.2. Uyarı. τ dönüşümünün farklı seçimleri ile bir çok (X, τ) örtü uzayı elde edilebilir. Dikkat edilirse, tanımdaki τ örtü dönüşümünün bire-bir olması gerekmemektedir.

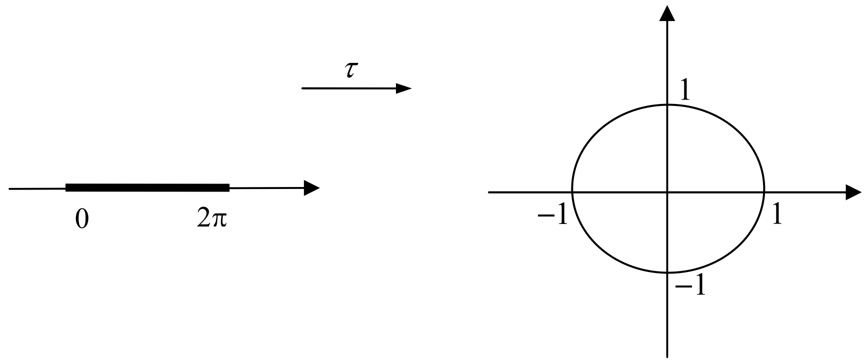
2.1.3. Örnek 1. X bağlantılı herhangi bir uzay ve $i : X \to X$ özdeşlik dönüşümü göz önüne alınırsa (X, i), X in aşikar örtü uzayı olur.
2. Benzer olarak eğer $f : Y \to X$ üzerine bir homeomorfizmi ise (Y, f), X in bir örtü uzayı olur.

2.1.4. Uyarı. Aşağıda bu iki özel örtü uzayından başka örnekler üzerinde de duracağız**.** Konunun ilerleyen kısımlarında X in basit bağlantılı olması durumunda, örtü uzayının bu iki aşikar örtü uzayından birisi olması gerektiğini göreceğiz, yani bu halde örtü uzayı (X, i) veya Y, X e homeomorf olmak üzere (Y, f) dir.

2.1.5. Örnek. $([0, 2\pi], \tau)$, birim çemberin örtü uzaylarından birisidir. Gerçekten de

$$\tau : [0, 2\pi] \to S^1,\ \tau(t) = (\sin t, \cos t)$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki tanımın sağlandığı açıktır. Bu durumda S^1 in herhangi bir açık alt aralığı olan yay parçaları bir temel komşuluk olur.



Şekil 2.1.1. Birim çemberin örtü uzayı

2.1.6. Tanım. X bağlantılı topolojik uzay ve Y herhangi bir topolojik uzay olmak üzere (X, τ), Y nin bir örtü uzayı olsun. $k > 1$ olmak üzere, eğer τ dönüşümü Y topolojik uzayını k defa örtüyorsa (X, τ) uzayına Y nin *k - yapraklı örtü uzayı* denir.

2.1.7. Örnek. Yukarıdaki örnekte τ dönüşümü yardımıyla elde edilen örtü uzayı S^1 çemberini tam bir defa örtmektedir. Ancak ([0, 2π], τ) örtü uzayı yerine ($\mathbb{R}$, τ) örtü uzayı alınırsa bu uzay S^1 in sonsuz-yapraklı bir örtü uzayı olur. Benzer düşünce ile ([0, 2π], τ) örtü uzayı yerine ([5π, 15π], τ) alınırsa bu uzay S^1 in 5-yapraklı bir örtü uzayı olur.

2.1.8. Örnek. $([-\pi,\pi),\ e^z)$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ delinmiş düzlemin 1-yapraklı örtü uzayıdır. Burada herhangi bir $z\in\mathbb{C}$ için $U_z = \{w\in[-\pi\,,\,\pi) : |w-z|<|z|\}$ açık diski bir temel komşuluktur. Bunu göstermek için U_z nin ters görüntüsünün herhangi bir V bileşeninin e^z yardımıyla U_z üzerine homeomorf olarak resmedildiğini görmek yeterlidir.

Buna göre herhangi bir $w \in U_z$ için $e^{f(w)} = w$ ve her bir $v \in V$ için $f(e^v) = v$ olacak biçimde sürekli bir $f : U_z \to V$ bulunmalıdır. Gerçekten de logaritma fonksiyonunun U_z diskine düşen dalı istenilen özellikteki fonksiyondur.

2.1.9. Uyarı. Yukarıdaki örnekte $[-\pi, \pi)$ yerine $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ alınması halinde de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ delinmiş düzlemin bir örtü uzayı elde edilir. Ancak bu durumda örtü uzayı sonsuz-yapraklı olur. Benzer düşünce ile $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\tau_n : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \ \tau_n(z) \mapsto z^n$$

dönüşümü yardımıyla $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \tau_n)$ ikilisinin $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ delinmiş düzleminin sonsuz-yapraklı bir örtü uzayı olduğu görülür.

2.1.10. Örnek. $(\widetilde{X}, \tau)$, X in ve $(\widetilde{Y}, \rho)$, Y nin örtü uzayları ise

$$\tau \times \rho : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y, \ (x, y) \mapsto (\tau \times \rho)(x, y) = (\tau x, \rho y)$$

olmak üzere $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, \ \tau \times \rho)$, $X \times Y$ çarpım uzayının bir örtü uzayı olur. U, $x \in X$ in bir temel komşuluğu ve V, $y \in Y$ nin bir temel komşuluğu ise $U \times V$, $(x, y) \in X \times Y$ noktasının bir temel komşuluğu olur.

2.1.11. Örnek. T, Tor yüzeyini göz önüne alalım. Aşikar olarak $i : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ olarak alınırsa $(\mathbf{T}, i)$, **T** tor yüzeyinin bir örtü uzayı olur. Diğer yandan

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{T}, \ (x, y) \mapsto \tau(x, y) = (\cos y \cos x, \cos y \sin x, \sin y)$$

olarak tanımlanırsa $(\mathbb{R}^2, \ \tau)$, tor yüzeyinin bir örtü uzayı olur. $\mathbf{T} \cong S^1 \times S^1$ olduğundan 2.1.10. Örnek gereği bu fonksiyon üzerine ve süreklidir.

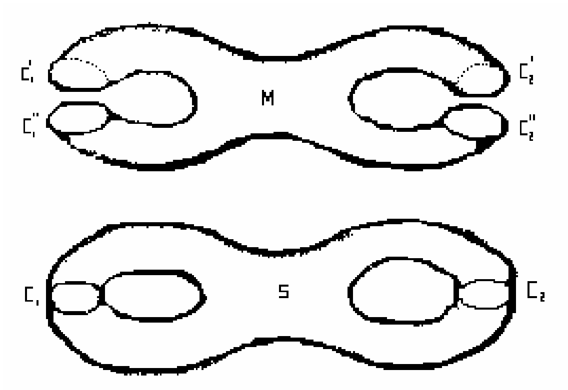
Tor yüzeyinin diğer bir örtü uzayı ise $\mathbb{R} \times S^1$ silindiridir. $x \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, y_2)$, $x = y_2$ olmak üzere

$$\tau : \mathbb{R} \times S^1 \to \mathbf{T}, \ (x, y) \mapsto \tau(x, y) = (\sin y_2, \sin y_1 \cos y_2, \cos y_2 \cos y_1)$$

biçiminde tanımlanırsa $(\mathbb{R} \times S^1, \ \tau)$ tor yüzeyinin bir örtü uzayı olur.

2.1.12. Örnek. S kompakt, yönlendirilebilen ve cinsi 2 olan bir yüzey olsun. Bu örnek ile S nin birden fazla örtü uzaylarının nasıl elde edilebileceği görülecektir.

M cinsi 0 olan ve sınırları C_1', C_1'', C_2', C_2'' çemberlerinden oluşan yönlendirilebilir, sınırlı ve kompakt bir yüzey olsun. Bu durumda, aşağıdaki homeomorfizmler yardımıyla, S yüzeyini M nin bir bölüm uzayı olarak düşünebiliriz.



Şekil 2.1.2. Bir sınırlı yüzeyin bölüm uzayı olarak cinsi 2 olan yüzey

$i = 1, 2$ için $h_i : C_i' \to C_i''$ homeomorfizmi ile C_i' ve C_i'' çemberleri özdeşlenerek bir tek C_i çemberi elde edilir. Tersine S yüzeyi, C_1 ve C_2 çemberleri boyunca kesilerek M yüzeyi elde edilebilir.

$D = \{1, 2, 3, \ldots , n\}$ sonlu bir küme ve bu küme üzerinde ayrık topoloji tanımlı olsun. $\sigma : M \times D \to M$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde $M \times D$ yi, her biri σ tarafından homeomorfik olarak M üzerine resmedilen M nin n tane ayrık kopyası olarak düşünebiliriz.

$M \times D$ nin bölüm uzayını elde edelim. Burada elde edeceğimiz bölüm uzayı bağlantılı bir $\widetilde{S}$ 2-manifoldu (yani yüzey) olup; σ, bölüm uzaylarının bir $\tau : \widetilde{S} \to S$ dönüşümü indirgeyecektir. O halde aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilmiş olacaktır.

$$\begin{tikzcd} M \times D \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"'] & \widetilde{S} \arrow[d, "\tau"] \\ M \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1.3. Bölüm uzaylarının değişmeli diyagramı

Buna göre ($\widetilde{S}$,τ), S nin bir örtü uzayı olur. $M \times D$ den elde edilen $\widetilde{S}$ nın aşağıdaki formlardan birisi olduğu görülür.

$i = 1$ veya 2 ve j, $k \leq n$ özelliğindeki j, $k \in \mathbb{Z}^+$ için (x, j) noktasını $(h_i(x), k)$ noktasına resmeden homeomorfizm yardımıyla $C_i' \times \{j\}$ çemberi $C_i'' \times \{k\}$ çemberi ile özdeşleşir, yani bunlar bir tek çember oluşturur. $M \times D$ den elde edilen $\widetilde{S}$ yüzeyi bağlantılı olduğu sürece çemberlerin bu şekildeki özdeşlenmeleri farklı biçimlerde de yapılabilir.

Örneğin; $n = 3$ için aşağıdaki şekilde bir özdeşleme yapılabilir:

$$C_1' \times \{1\} \text{ ile } C_1'' \times \{2\}$$

$$C_1' \times \{2\} \text{ ile } C_1'' \times \{3\}$$

$$C_1' \times \{3\} \text{ ile } C_1'' \times \{1\}$$

$$C_2' \times \{1\} \text{ ile } C_2'' \times \{2\}$$

$$C_2' \times \{2\} \text{ ile } C_2'' \times \{1\}$$

$$C_2' \times \{3\} \text{ ile } C_2'' \times \{3\}$$

2.1.13. Önerme. (X, τ), Y nin bir örtü uzayı olsun. Buna göre;

a) $\tau : X \to Y$ örtü dönüşümü bir açık dönüşümdür,

b) $x \in X$ olmak üzere x in öyle bir U komşuluğu vardır ki τ, U üzerinde bir homeomorfizmdir,

c) Her bir açık temel komşuluk bağlantılıdır,

d) Eğer Y yerel olarak eğrisel bağlantılı ise X de yerel olarak eğrisel bağlantılıdır.

İspat. a) Örtü dönüşümünün tanımına dikkat edilirse her bir $\omega \in Y$ için $\tau^{-1}(\Delta)$ nın her bir bileşeni açık olacak biçimde ω nın bir Δ komşuluğu vardır ve τ bir homeomorfizm olduğundan, X deki her bir açık kümenin τ altındaki görüntüsü yine bir açık kümedir. Böylece $\tau : X \to Y$ örtü dönüşümü bir açık dönüşüm olur.

b) Yine tanımdan hareketle bu özellikteki bir komşuluğun varlığı aşikardır.

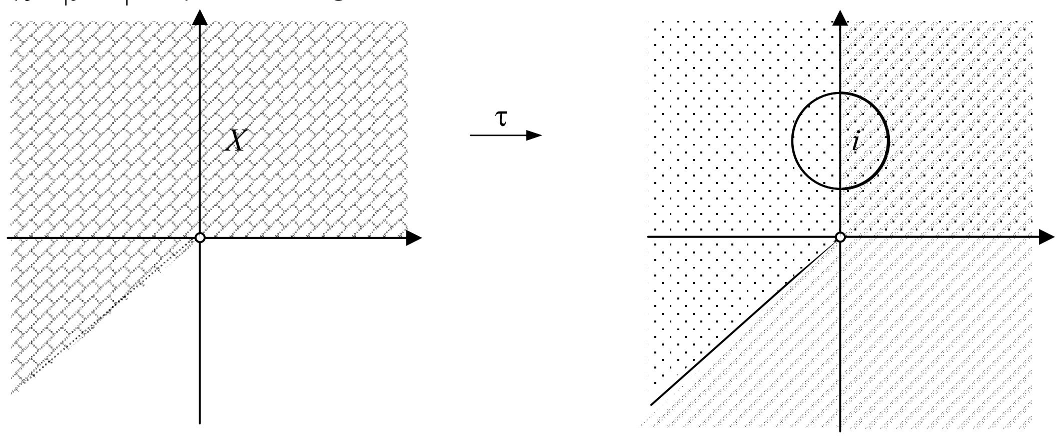
c) Her bir $\omega \in Y$ için $\tau^{-1}(\Delta)$ nın her bir bileşeni açık olacak biçimde ω nın bir Δ komşuluğu vardır. Üstelik τ, bu bileşenlerin her birisini Δ üzerine homeomorf olarak resmeder. Diğer yandan X bağlantılı topolojik uzay olduğundan Δ açık temel komşuluğu bağlantılı bir küme olur.

d) Y yerel olarak eğrisel bağlantılı bir uzay ve τ sürekli bir fonksiyon olduğundan X bağlantılı topolojik uzayı aynı zamanda da yerel olarak eğrisel bağlantılı bir uzay olur.

□

2.1.14. Uyarı. Yukarıdaki önermenin b) şıkkı düşünüldüğünde akla şöyle bir soru gelebilir: X den Y üzerine yerel olarak bire-bir olan her bir τ dönüşümü için (X, τ), Y nin bir örtü uzayı olur mu? Bu soruyu cevaplayabilmek için X uzayını ve τ dönüşümünü $X = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0,\ 0 < \arg z < \frac{5\pi}{4}\}$ ve $\tau(z) = z^2$ olarak alalım, bu durumda $Y = \tau(X) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

dir. $z \in X$ in herhangi bir komşuluğu göz önüne alınırsa, bu komşulukta τ bire-bir ve dolayısıyla z keyfi olduğundan τ yerel olarak bire-birdir. Şimdi de (X, τ) ikilisinin Y nin bir örtü uzayı olup olmadığını inceleyelim. $0 < r < 1$ özelliğindeki herhangi bir r için Y de $\Delta_r = \{\zeta : |\varsigma - i| < r\}$ kümesini göz önüne alalım.



Şekil 2.1.4. X kümesi ve τ altındaki görüntüsü

Şekle dikkat edilirse Δ_r diskinin bir kısmı(hafif taralı kısmı yani ikinci bölgede kalan kısmı) τ dönüşümü ile 1 defa örtülürken bir kısmı da (koyu taralı kısmı yani birinci bölgede kalan kısmı) iki defa örtüldüğünden, $\tau^{-1}(\Delta_r)$ kümesi iki bileşeni bulundurur. Bunun sebebi $\tau(z) = z^2$ fonksiyonu herhangi bir $z \in X$ noktasının argümanını 2 katına çıkarmasıdır. O halde (X, τ), Y nin bir örtü uzayı değildir yani yerel olarak bire-bir olan her bir dönüşüm yardımıyla bir örtü uzayı elde edilemez.

2.2. Eğrilerin Örtü Uzayına Yükseltilmesi

Bu bölümde örtü uzaylarının en önemli özelliklerinden birisi olan örtülen uzaydaki her bir eğrinin, aşağıda tanımı verilecek olan, örtü uzayındaki bir eğriye yükseltilebilmesi özelliği incelenecektir.

2.2.1. Tanım. (X, τ), Y nin bir örtü uzayı ve γ, Y de bir eğri olsun. Eğer $\tau \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ oluyor ise X in bu özellikteki $\widetilde{\gamma}$ eğrisine *γ nın bir yükseltilmesi* (*lifting*) denir.

2.2.2. Uyarı. Yükseltme kavramı göz önüne alınacak olursa, $I = [0, 1]$ ve γ, Y de bir eğri olmak üzere aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\tau"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] & Y \end{tikzcd}$$

Şekil 2.2.1. γ eğrisi ve τ örtü dönüşümü

γ nın yükseltilebilir olması demek yukarıdaki diyagramın aşağıdaki diyagram gibi değişmeli bir diyagram olacak biçimde bir $\widetilde{\gamma}$ fonksiyonunun tanımlanabilir olması demektir.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\tau"] \\ I \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & Y \end{tikzcd}$$

Şekil 2.2.2. γ nin yükseltilmesi

Dikkat edilirse yukarıdaki değişmeli diyagramda bir yerden diğerine ele alınan eğriden bağımsız gidilebilir.

2.2.3. Teorem. (X, τ), Y nin bir örtü uzayı ve $F : [0, 1] \times [0, 1] \to Y$ sürekli fonksiyonu $\tau(x_0) = w_0$ özelliğindeki her bir nokta için $F(0, 0) = w_0$ özelliğinde ise bu takdirde $\widetilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ sürekli fonksiyonu $\widetilde{F}(0, 0) = x_0$ ve $\tau \circ \widetilde{F} = F$ olacak şekilde vardır ve tektir. (Conway 1995)

İspat. $0 \le i, j \le n-1$ olmak üzere [0, 1] in iki parçalanışı $\{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1\}$ ve $\{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1\}$ olsun. F sürekli olduğundan $F([s_i, s_{i+1}] \times [t_i, t_{i+1}])$, Y deki bir Δ_{ij} açık temel komşuluğu tarafından kapsanır. $w_0 = F(0, 0) \in \Delta_{00}$ ve U_{00} ise $\tau^{-1}(\Delta_{00})$ ın x_0 ı bulunduran bir bileşeni olsun. τ dönüşümünün U_{00} üzerine kısıtlaması olan $\tau|U_{00}$ dönüşümü, U_{00} ın Δ_{00} üzerine bir homeomorfizmi olduğundan $\widetilde{F} : [0, s_1]\times[0, t_1] \to X$, $(s, t) \mapsto \widetilde{F}(s, t) = (\tau|U_{00})^{-1} \circ F(s, t)$ olarak tanımlanabilir. $\widetilde{F}$ yı $[0, s_2]\times[0, t_2]$ kümesine genişletelim. X kompakt olduğundan her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır ve X bağlantılı olduğundan $\widetilde{F}(\{s_1\}\times[0, t_1])$ bağlantılı bir kümedir. O halde $F(\{s_1\}\times[0, t_1]) \subset \Delta_{10}$ olduğundan $\tau^{-1}(\Delta_{10})$, $\widetilde{F}(\{s_1\}\times[0, t_1])$ tarafından kapsanır. U_{10}, $\tau^{-1}(\Delta_{10})$ ın $F(\{s_1\}\times[0, t_1])$ i bulunduran bir bileşeni olsun. Bu takdirde $\tau|U_{10}$ bir homeomorfizmdir. $(s, t) \in [s_1, s_2] \times [0, t_1]$ için $\widetilde{F}(s, t) = (\tau|U_{10})^{-1} \circ F(s, t)$ olarak tanımlansın. Tanım kümesi iki kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilir. Üstelik $\widetilde{F}$ bu iki küme üzerinde de süreklidir. Bunların arakesiti üzerinde de sürekli olduğundan bu iki kümenin birleşimi üzerinde de süreklidir. Bu mantıkla hareket edilerek $\tau \circ \widetilde{F} = F$ ve $\widetilde{F}(0, 0) = x_0$ özelliğinde bir $\widetilde{F} : [0, 1]\times [0, 1] \to X$ sürekli fonksiyonu elde edilmiş olur. Dikkat edilirse her bir adımda $\widetilde{F}$ fonksiyonunun tanımı tek türlüdür. O halde varlığı gösterilen $\widetilde{F}$ fonksiyonu bir tektir.

$\square$

2.2.4. Sonuç. (X, τ), Y nin bir örtü uzayı olsun. Eğer γ, Y de başlangıç noktası w_0 olan ve $\tau(x_0) = w_0$ özelliğinde bir yol ise bu takdirde, γ eğrisinin, başlangıç noktası x_0 olan bir tek $\widetilde{\gamma}$ yükseltilmesi vardır.

İspat. $F : [0, 1]\times [0, 1] \to Y$ fonksiyonu $(s, t) \mapsto F(s, t) = \gamma(s)$ olarak tanımlansın. O halde F sürekli ve $F(0, 0) = w_0$ dir. 2.2.3. Teorem gereği $\tau \circ \widetilde{F} = F$ ve $\widetilde{F}(0, 0) = x_0$ olacak biçimde bir tek $\widetilde{F}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow X$ fonksiyonu vardır. $\widetilde{\gamma}(s)=\widetilde{F}(s,0)$ ise bu takdirde $\widetilde{\gamma}$ nın başlangıç noktası x_0 dır ve $\widetilde{\gamma}$, γ nın bir yükseltilmesidir.

$\widetilde{\gamma}$ nın tekliğini göstermek için $\widetilde{\sigma}$ yolunun da X de başlangıç noktası x_0 olan ve γ yı yükselten başka bir yol olduğunu kabul edelim.

$$\widetilde{K}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow X,\ (s,t)\mapsto\widetilde{K}(s,t)=\widetilde{\sigma}(s)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$\widetilde{K}(0,0)=x_0 \text{ ve } \tau\circ\widetilde{K}(s,t)=\tau\circ\widetilde{\sigma}(s)=F(s,t)$$

olur ve böylece 2.2.3. Teorem in teklik kısmı gereği $\widetilde{F}=\widetilde{K}$ olur. Buradan

$$\widetilde{\gamma}(s)=\widetilde{F}(s,0)=\widetilde{K}(s,0)=\widetilde{\sigma}(s)$$

bulunur.

□

2.2.5. Soyut Monodromy Teoremi. (X,τ), Y nin bir örtü uzayı olsun. γ ve σ, Y de başlangıç ve bitim noktaları aynı olan iki yol olarak alınsın. $\widetilde{\gamma}$ ve $\widetilde{\sigma}$ ise başlangıç noktaları aynı olan ve sırasıyla γ ve σ nın yükseltilmesi ile elde edilen iki yol olsun. Bu takdirde eğer Y de $\gamma\sim\sigma$ ise $\widetilde{\gamma}$ ve $\widetilde{\sigma}$ nın bitim noktaları aynıdır ve üstelik $\widetilde{\gamma}\sim\widetilde{\sigma}$ dır. (Conway 1995)

İspat. w_0 ve w_1, γ ve σ nın sırasıyla başlangıç ve bitim noktaları olsun. $x_0\in\tau^{-1}(w_0)$ noktası $\widetilde{\gamma}(0)=\widetilde{\sigma}(0)=x_0$ özelliğinde olsun. Hipotez gereği, her bir $s,t\in[0,1]$ için $F:[0,1]\times[0,1]\rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu $F(0,t)=w_0$, $F(1,t)=w_1$, $F(s,0)=\gamma(s)$, $F(s,1)=\sigma(s)$ olacak biçimde vardır. Dikkat edilirse 2.2.3. Teoremin şartları sağlanmaktadır. O halde 2.2.3. Teorem gereği, F nin sürekli bir tek $\widetilde{F}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow X$ yükseltilmesi $\widetilde{F}(0,0)=x_0$ ve $\tau\circ\widetilde{F}=F$ olacak biçimde vardır. Böylece $F(\{0\}\times[0,1])=\{w_0\}$ ve $\tau\circ\widetilde{F}=F$ olduğundan $\widetilde{F}(\{0\}\times[0,1])\subset\tau^{-1}(w_0)$ olur. $\tau^{-1}(w_0)$ in her bir bileşeni tek bir noktadan oluşur ve $\widetilde{F}(\{0\}\times[0,1])$ bağlantılıdır. O halde her t için $\widetilde{F}(0,t)=x_0$ dır. Benzer olarak her t için $\widetilde{F}(1,t)=x_1$ olacak biçimde bir x_1 noktası var olup $\tau^{-1}(x_1)=w_1$ dir.

$\widetilde{\gamma}$ nın bir tekliği ve $s \mapsto \widetilde{F}(s, 0)$ ın başlangıç noktası x_0 olan, γ yı yükselten bir yol olduğundan $\widetilde{\gamma}(s) = \widetilde{F}(s, 0)$ olmalıdır. Benzer düşünce ile $\widetilde{\sigma}(s) = \widetilde{F}(s, 1)$ olur. O halde her t için $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\sigma}(1) = x_1 = F(1, t)$ ve $\widetilde{F}$, X de $\widetilde{\gamma} \sim \widetilde{\sigma}$ olduğunu gösterir.

□

2.2.6. Uyarı. Bundan sonraki amaç 2.2.5. Soyut Monodromy Teoremi yardımıyla aşağıda ifadesi verilen Monodromy Teoremini elde etmek olacaktır. Ardından 2.2.5. Soyut Monodromy Teoreminin uygulamaları ele alınacaktır.

2.2.7. Monodromy Teoremi. (f, D) bir fonksiyon elemanı, G ise D yi bulunduran ve (f, D) nin sınırsız devamı olduğu bir bölge olsun. $a, b \in D$ olmak üzere γ_0 ve γ_1, G de başlangıç noktası a, bitim noktası b olan iki eğri olsun. $\{ (f_t, D_t) \}$ ve $\{ (g_t, B_t) \}$, (f, D) nin sırasıyla γ_0 ve γ_1 boyunca analitik devamları olsun. Eğer G de $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ise bu takdirde $[f_1]_b = [g_1]_b$ olur. □ (Conway 1995)

2.2.8. Uyarı. 2.2.5. Soyut Monodromy Teoremi yardımıyla Monodromy Teoremini elde edebilmek için 2.2.9. Yardımcı Teorem ve 2.2.10. Teorem e ihtiyaç vardır.

2.2.9. Yardımcı Teorem. (g, A) bir fonksiyon elemanı ve B diski $A \subset B$ özelliğinde bir disk olsun. Ayrıca B de (g, A) nın sınırsız analitik devamı olsun. Eğer γ, B de $\gamma(0) = \gamma(1) = a \in A$ özelliğinde bir eğri ve $\{(g_t, A_t)\}$, (g, A) nın γ boyunca analitik devamı ise bu takdirde $[g_0]_a = [g_1]_a$ dir. (Conway 1995)

2.2.10. Teorem. (D, f), G bölgesinde sınırsız analitik devamı olan bir fonksiyon elemanı olsun. $\boldsymbol{H}$, belli bir $z_0 \in D$ için $(z_0, [f]_{z_0})$ ı bulunduran $(\boldsymbol{S}(G), \tau)$ demetinin bir bileşeni olsun. Bu takdirde $(\boldsymbol{G}, \tau)$, G nin bir örtü uzayıdır.

İspat. B, $B \subset G$ özelliğindeki herhangi bir disk ve $\mathcal{U}$, $\boldsymbol{H}$ de kapsanan $\tau^{-1}(B)$ nin bir bileşeni olsun. Eğer τ nun $\mathcal{U}$ yu, $\boldsymbol{B}$ üzerine homeomorf olarak resmettiği gösterilebilirse ispat biter.

$(a, [g_0]_a) \in \mathcal{U}$ belli bir nokta olsun. Bu takdirde aşağıdaki iddianın ispatı ile teoremin ispatının tamamlanmasında kullanılacaktır.

2.2.11. İddia. $(z, [h]_z) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow z \in B$ ve $[h]_z$, B de belli bir eğri boyunca $[g]_a$ nın bir devamıdır.

İspat. ($\Leftarrow$:) Gerçekten de, $(z, [h]_z)$ bu özellikte bir nokta ise bu takdirde $\tau^{-1}(B)$ de ($\subseteq \boldsymbol{S}(G)$) de başlangıç noktası $(a, [g]_a)$, bitim noktası $(z, [h]_z)$ olan bir γ eğrisi vardır. O halde $(z, [h]_z)$, tıpkı $(a, [g]_a)$ gibi $\tau^{-1}(B)$ nin aynı bileşeninde bulunmak zorundadır, yani $(z, [h]_z) \in \mathcal{U}$ olur.

($\Rightarrow$:) $(z, [h]_z) \in \mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U}$ üst yarı düzlemi eğrisel bağlantılı olduğundan $\mathcal{U}$ da başlangıç noktası $(a, [g]_a)$, bitim noktası $(z, [h]_z)$ olan bir yol bulunabilir. Bu ise $[h]_z$ nin $\tau(\mathcal{U}) \subseteq B$ boyunca $[g]_a$ nın devamı olduğunu gösterir. (f, D), G de sınırsız devamı olduğundan ve $z_0 \in D$ olmak üzere $[g]_a$, $[f]_{z_0}$ ın devamı olduğundan aşikar olarak $[g]_a$, B de sınırsız analitik devama sahiptir. Dolayısıyla $\tau(\mathcal{U}) = B$ olur.

İspatın tamamlanması için geriye sadece $\tau \mid \mathcal{U}$ kısıtlanmış fonksiyonunun birebir olduğunu görmek kaldı. Bunun için $(b, [h]_b)$ ve $(b, [k]_b) \in \mathcal{U}$ iken $[h]_b = [k]_b$ olduğunu görmek yeterlidir. Bu ise 2.2.9. Yardımcı Teorem un aşikar sonucudur.

□

2.2.12. Uyarı. 2.2.10 Teorem notasyonu yardımıyla, $a \in D$ belli bir nokta ve γ, σ G de başlangıç noktası a, bitim noktası $z = b$ olan iki yol olsun. $\{(D_t, f_t)\}$ ve $\{(D_t, g_t)\}$, (D, f) nin sırasıyla γ ve σ boyunca devamları olsun. O halde $[f_0]_a = [g_0]_a = [f_0]_a$ olur. Böylece $\gamma(t) = (\gamma(t), [f_t]_{\gamma(t)})$ ve $\tilde{\sigma}(t) = (\sigma(t), [g_t]_{\sigma(t)})$, $\boldsymbol{S}$ de başlangıç noktası $(a, [f]_a)$ olan iki yol olur. Üstelik $\tau \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ ve $\tau \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ olur. O halde $\tilde{\gamma}$ ve $\tilde{\sigma}$, γ ve σ nın $\boldsymbol{S}$ ye bir tek yükseltilmesidir. 2.2.5. Soyut Monodromy Teoremi gereği G de $\gamma \sim \sigma$ ise bu takdirde $\tilde{\gamma}$ ve $\tilde{\sigma}$ aynı bitim noktasına sahiptir yani $(b, [f_1]_b) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\sigma}(1) = (b, [g_1]_b)$ ve böylece $[f_1]_b = [g_1]_b$ olur.

2.2.13. Uygulama. 2.2.5. Soyut Monodromy Teoreminin bir uygulaması olarak "Delinmiş düzlemdeki kapalı eğriler homotopiktir. $\Leftrightarrow$ Bu eğrilerin orijini sarma sayıları aynıdır." önermesinin doğruluğu görülecektir. Buna göre $S^1 = \{ z : |z| = 1 \}$ birim çemberi olsun. 2.1. kısmında da belirtildiği gibi $\tau(t) = e^{2\pi it}$ olarak alınırsa $(\mathbb{R}, \tau)$, S^1 in bir örtü uzayı olur. γ, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da rektifiye edilebilir herhangi bir eğri ise γ, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da $\sigma(t) = \dfrac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ olarak tanımlanan σ eğrisine homotopiktir. Gerçekten de, yukarıda tanımlanan σ eğrisi, γ eğrisinin kendi boyuna bölünmesinden başka bir şey değildir. O halde $\gamma \sim \sigma$ olur.

O halde her t için $|\gamma(t)| = 1$ olduğu kabul edilsin. Benzer olarak da $\gamma(0) = 1$ olduğu kabul edilebilir. $\tilde{\gamma}(0) = 0$ ve $\gamma(t) = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)}$ özelliğindeki bir tek eğri olsun. γ rektifiye edilebilir olarak verilmişti; o halde γ eğrisinin boyu sonlu olduğundan bu eğriye bağlı olarak tanımlanan $\tilde{\gamma}$ eğrisi de rektifiye edilebilirdir.

Üstelik;

$$
\begin{aligned}
n(\gamma; 0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{d\gamma(t)}{\gamma(t)} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{de^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)}}{\gamma(t)} \\
&= \int_0^1 d\tilde{\gamma}(t)
\end{aligned}
$$

ve böylece $\tilde{\gamma}(0) = 0$ olduğundan $n(\gamma; 0) = \tilde{\gamma}(1)$ olur.

O halde eğer σ da $|\sigma(t)| = 1$, $\sigma(0) = 0 = \sigma(1)$ ve $n(\gamma; 0) = n(\sigma; 0) = n$ özelliğinde G nin $\mathbb{R}$ ye bir tek yükseltilmesi olmak üzere $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\gamma}(1)$ dır. F fonksiyonu

$$F : [0, 1]\times[0, 1] \to S^1,\ (s, t) \mapsto F(s, t) = e^{2\pi i[(1-t)\tilde{\sigma}(s)+t\tilde{\gamma}(s)]}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde $\tilde{\gamma}(0) = 0$ ve $\tilde{\sigma}(0) = 0$ olduğundan $F(0, t) = 1 = F(1, t)$ olur. $s = 0$ için $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $\tilde{\sigma}(0) = 0$ ve $s = 1$ için $\tilde{\gamma}(1) = n$ ve $e^{2\pi in} = 1$ olduğundan $\gamma \sim \sigma$ dir.

2.2.14. Uyarı. 1. Dikkat edilirse γ ve σ nın rektifiye edilebilirlik şartı sadece γ ve σ nın orijini sarma sayısını tanımlamada kullanılmıştır.
2. Sarma sayısı tanımı rektifiye edilemez eğrilere genişletilebilir.

2.2.15. Tanım. γ, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$da $\gamma(0) = 1 = \gamma(1)$ özelliğinde herhangi bir kapalı eğri olsun. Ayrıca $\gamma_1(t) = \dfrac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$ ve $\tilde{\gamma}$, $\mathbb{R}$ de $\tilde{\gamma}(0) = 0$ ve $\gamma_1(t) = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)}$ özelliğinde bir tek eğri ise *γ nın orijini sarma sayısı* $n(\gamma; 0) = \tilde{\gamma}(1)$ olarak tanımlanır.

2.2.16. Uyarı. 2.2.13 Uygulama da elde edilen eşitlik göz önüne alınırsa yukarıda verilen tanımın rektifiye edilebilir eğriler için verilen formal tanımla da örtüştüğü görülür.

2.2.17. Teorem. γ ve σ; $\mathbb{C}\setminus\{0\}$da $\sigma(0) = \gamma(0) = 1$ özelliğinde iki kapalı eğri ise bu takdirde

“$\mathbb{C}\setminus\{0\}$da $\gamma \sim \sigma \Leftrightarrow n(\gamma; 0) = n(\sigma; 0)$ “

İspat. $n(\gamma; 0) = n(\sigma; 0)$ ise $\gamma \sim \sigma$ olduğu yukarıda gösterilmişti. Tersine eğer $\gamma \sim \sigma$ ise 2.2.5. Soyut Monodromy Teoremi gereği $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\sigma}(0) = 0$ özelliğindeki $\tilde{\gamma}$ ve $\tilde{\sigma}$ yükseltilmeleri aynı bitim noktasına sahiptir yani $n(\gamma; 0) = n(\sigma; 0)$ olur.

2.3. Analitik Örtü Dönüşümleri

Bu bölümde, Üniformizasyon (düzgünleştirme) Teoreminin esas kısmını oluşturan analitik örtü dönüşümleri ele alınacaktır. Düzlemdeki her bir Ω bölgesi için $\mathbb{C}\setminus\Omega$ en az iki nokta bulunduran bir küme ve $\mathbb{D}$ birim diski göstermek üzere bir $\tau : \mathbb{D} \to \Omega$ analitik örtü dönüşümünün varlığı görülecektir.

2.3.1. Tanım. G ve Ω, $\mathbb{C}$ de iki bölge olmak üzere τ analitik fonksiyonu için $(G,\ \tau)$, Ω nın bir örtü uzayı oluyor ise $(G,\ \tau)$ ikilisine Ω nın bir *analitik örtü uzayı* denir. Bu özellikteki τ analitik fonksiyonu bir analitik örtü dönüşümü adını alır.

2.3.2. Örnek. 2.1. Kısmında ele aldığımız delinmiş düzlem $(\mathbb{C},\ e^z)$ ve $n \neq 0$ olmak üzere $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, z^n)$ örtü uzayları birer analitik örtü uzayıdır.

2.3.3. Uyarı. Burada herhangi bir homeomorfizm ya da bir konform denklik bir analitik örtü uzayı oluşturmasına karşılık temel amaç; $G = \mathbb{D}$ ve Ω, $\mathbb{C}$ de bir bölge olmak üzere $(G,\ \tau)$ analitik örtü uzayları oluşturmak olacaktır. Bu bölümde sadece G ve Ω nın metrik uzay olması durumu ele alınacaktır.

Ayrıca G ve Ω metrik uzayları yol ve yerel yol bağlantılı olarak; $(G,\ \tau)$, Ω nın bir örtü uzayı, $a_0 \in G$ ve $\alpha_0 = \tau(a_0) \in \Omega$ olarak düşünülecektir.

2.3.4. Tanım. Eğer $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ yolu $\gamma(0) = \alpha_0$ özelliğinde bir yol ise 2.2.3. Teorem gereği $\tilde{\gamma}(0) = \alpha_0$ ve $\tau \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ olacak biçimde bir tek $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to G$ yolu vardır. Bu özellikteki $\tilde{\gamma}$ yolu *γ nın bir a_0 - yükseltilmesi* olarak adlandırılır.

2.3.5. Tanım. X_τ bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her bir $x \in X$ noktası ve x in her bir U komşuluğu için yol bağlantılı $V \subset U$ özelliğinde bir V komşuluğu varsa X_τ ya *yerel yol bağlantılı topolojik uzay* denir.

2.3.6. Uyarı. Tekrarı önlemek amacıyla, aksi belirtilmedikçe

i) G ve Ω yol ve yerel yol bağlantılı metrik uzaylar,

ii) (G, τ), Ω nın örtü uzayı,

iii) $a_0 \in G$ ve $\alpha_0 = \tau(a_0) \in \Omega$ olarak alınacaktır.

2.3.7. Tanım. γ, Ω da kapalı bir eğri ise γ ya bir *ilmek* (veya *düğüm*) denir. Eğer $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ ilmeği $\gamma(0) = \gamma(1) = \alpha_0$ özelliğinde ise γ ilmeğine α_0 *- taban noktalı bir ilmek*tir denir.

Aşağıda yükseltilebilir sürekli fonksiyonlar hakkında bazı temel sonuçlar verilmiştir.

2.3.8. Yardımcı Teorem. (G, τ), Ω nın bir örtü uzayı, X yerel bağlantılı uzay, $f : X \to \Omega$ sürekli bir fonksiyon ve $T : X \to G$, $\tau \circ T = f$ özelliğinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

i) $x \in X$,

ii) Δ, $\xi = f(x)$ in bir temel komşuluğu,

iii) U, $\tau^{-1}(\Delta)$ nın $z = T(x)$ noktasını bulunduran bileşeni,

iv) W, x in $f(W) \subseteq \Delta$ özelliğinde bağlantılı bir komşuluğu ise,

$T \mid W = (\tau \mid U)^{-1} \circ (f \mid W)$ dir.

İspat. Yukarıdaki notasyonu kullanarak, W bağlantılı ve T sürekli olduğundan $T(W)$ nin bağlantılı olduğu ve $\tau^{-1}(\Delta)$ da kapsandığı bulunur. Ayrıca hipotez gereği $z = T(x)$ ve W, x in bağlantılı komşuluğu olduğu için $z \in T(W)$ olduğu bulunur. Böylece $T(W) \subseteq U$ olduğundan her $w \in W$ için $f(w) = \tau(T(w))$ dır. Çünkü hipotez gereği $\tau \circ T = f$ olarak verilmişti. Böylece aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir. O halde $T \mid W = (\tau \mid U)^{-1} \circ (f \mid W)$ olur.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "T"'] & \Omega \\
& X \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

Şekil 2.3.1. τ örtü fonksiyonu ve T ve f fonksiyonlarının değişmeli diyagramı

□

2.3.9. Önerme. (G, τ), Ω nın bir örtü uzayı, X bağlantılı, yerel bağlantılı uzay, $f : X \to \Omega$ sürekli bir fonksiyon ve S, $T : X \to G$, $f = \tau \circ T = \tau \circ S$ özelliğinde sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer X de $T(x_0) = S(x_0)$ özelliğini sağlayan bir x_0 noktası varsa bu takdirde $S = T$ dir.

İspat. $Y = \{x \in X : \ T(x) = S(x)\}$ kümesi göz önüne alınırsa hipotez gereği $Y \neq \phi$ dir. Y de $(x_n) \to x_0$ özelliğinde bir dizi ele alınsın. T ve S sürekli olduğundan aynı zamanda dizisel süreklidir. O halde $(x_n) \to x_0 \Rightarrow T(x_n) \to T(\mathrm{x}_0) = S(x_0)$ olup $S(x_n) \to S(\mathrm{x}_0)$ olur yani $x \in Y$ dir. Böylece Y kapalı bir küme olur. Şimdi Y nin aynı zamanda açık bir küme olduğunu gösterelim. Böylece her $x \in X$ için $T(x) = S(x)$ olur ki, bu da $S = T$ olduğunu gösterir. Buna göre eğer $x \in Y$ ise $z = T(x) = S(x)$, $\xi = f(x)$ ve Δ, ξ nın bir temel komşuluğu olsun. Ayrıca U, $\tau^{-1}(\Delta)$ nın z yi bulunduran bileşeni olsun. Eğer W, x in $f(W) \subseteq \Delta$ özelliğinde bir komşuluğu ise bu takdirde yukarıdaki yardımcı teorem gereği $T \mid W = (\tau \mid U)^{-1} \circ (f \mid W)$ ve ayrıca $S \mid W = (\tau \mid U)^{-1} \circ (f \mid W)$ olur. O halde $W \subseteq Y$ olduğu bulunur yani Y açık bir kümedir. □

2.3.10. Teorem. (G, τ), Ω nın bir örtü uzayı, X bağlantılı, yerel bağlantılı uzay, $f : X \to \Omega$ sürekli fonksiyonu $f(x_0) = \alpha_0 = \tau(a_0)$ özelliğinde olsun. Eğer X basit bağlantılı ise bu takdirde $T : X \to G$ sürekli fonksiyonu $f = \tau \circ T$ ve $T(x_0) = \alpha_0$ olacak biçimde vardır ve tektir.

İspat. İlk olarak istenilen özellikteki fonksiyon tanımlanacak, bu fonksiyonun iyi tanımlı olduğu görülerek varlığı garanti edildikten sonra tekliği görülecektir. Buna göre $x \in X$ olsun. σ yolu X de başlangıç noktası x_0 ve bitim noktası x olan bir yol olsun. O halde

f o σ başlangıç noktası x_0 ve bitim noktası $f(x)$ olan bir yol olur. $\widetilde{\gamma}$, γ nın yukarıda verilen özellikteki G ye bir a_0 - yükseltilmesi olsun. $T(x) = \widetilde{\gamma}(1)$ olarak tanımlansın.

Öncelikle $T(x)$ in iyi tanımlı olduğu görülmelidir. Bunun için σ_1 yolu X de başlangıç noktası x_0 ve bitim noktası x olan diğer bir yol olsun. Hipotez gereği X basit bağlantılı olduğundan X de f o $\sigma_1 \sim f$ o σ olduğu bulunur. 2.2.5. Soyut Monodromy Teoremi gereği f o σ_1 nın a_0 - yükseltilmesi $\widetilde{\gamma}$ ile aynı bitim noktasına sahiptir. Bu yüzden T fonksiyonunun tanımı σ eğrisinin seçiminden bağımsızdır. O halde T iyi tanımlı bir fonksiyondur.

T nin sürekliliğini görmek için $x \in X$ ve $z = T(x)$ olarak alınsın. σ yolu X de başlangıç noktası x_0 ve bitim noktası x olan bir yol, $\gamma = f$ o σ ve $\widetilde{\gamma}$, G ye bir a_0 - yükseltilmesi olsun. O halde $T(x) = z = \widetilde{\gamma}(1)$ dir. Δ, $\xi = f(x)$ in bir temel komşuluğu ve U, $\tau^{-1}(\Delta)$ nın z yi bulunduran bileşeni olsun. Δ eğrisel bağlantılı olacak biçimde seçilsin. W, x in X de $f(W) \subseteq \Delta$ özelliğinde eğrisel bağlantılı bir komşuluğu olsun. $w \in W$ herhangi bir nokta olmak üzere λ yı W de başlangıç noktası x, bitim noktası w olan bir yol olarak alınsın. O halde f o λ, Δ da başlangıç noktası $\xi = f(x)$, bitim noktası $f(w)$ olan bir yol olur. Böylece f o λ nın z_0 - yükseltilmesi $\widetilde{\lambda} = (\tau \mid U)^{-1}$ o f o λ olur. $\lambda\sigma$, X de başlangıç noktası x_0 ve bitim noktası x olan bir yol olması $T(w) = \widetilde{\lambda} = (\tau \mid U)^{-1}$ o $(f(w))$ olmasına yol açar. Böylece $T \mid W = (\tau \mid U)^{-1}$o $(f \mid W)$ olduğu bulunur. O halde T süreklidir.

Dikkat edilirse 2.3.9 Önerme nin şartları sağlanmaktadır. Böylece T nin bir tek olduğu görülür. T fonksiyonu $T(x) = \widetilde{\gamma}(1)$ olarak tanımlandığından τ o $T = f$ olup $T(x_0) = \tau^{-1}(f(x_0)) = \tau^{-1}(a_0) = x_0$ dır. □

2.3.11. Tanım. (G_1, τ_1) ve (G_2, τ_2), Ω nın örtü uzayları olsun. $T : G_1 \to G_2$ sürekli dönüşümü τ_2 o $T = \tau_1$ özelliğinde ise T dönüşümüne G_1 den G_2 ye bir *homomorfizm* denir. Ayrıca T bir homeomorfizm ise T, örtü uzayları arasında bir *izomorfizm* adını alır.

2.3.12. Tanım. (G, τ), Ω nın bir örtü uzayı olsun. G nin kendi üzerine bir örtü uzayı izomorfizmi, örtü uzayının bir *otomorfizmi* adını alır. (G, τ) nun tüm otomorfizmlerinin ailesi $Aut(G, \tau)$ ile gösterilecektir.

2.3.13. Uyarı. Bir izomorfizmin tersi de bir izomorfizmdir. Ayrıca $Aut(G, \tau)$ fonksiyonların bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. (Jones ve Singerman 1987)

Aşağıda örtü uzaylarının homomorfizmleri hakkında bazı özellikler verilmiştir.

2.3.14. Önerme. (G_1, τ_1), (G_2, τ_2) Ω nın $\tau(a_1) = \tau(a_2) = \alpha_0$ özelliğinde iki örtü uzayı olsun. Bu takdirde

a) Eğer $T : G_1 \to G_2$ örtü uzayları arasında bir homomorfizm ise T bir üzerine yerel homeomorfizmdir.

b) Eğer G_1 basit bağlantılı ise $T(a_1) = a_2$ olacak biçimde bir tek $T : G_1 \to G_2$ homomorfizmi vardır.

c) Ω nın herhangi iki basit bağlantılı örtü uzayı izomorftur.

İspat. a) $T(a_1) = a_2$ kabul edilmesi genelliği bozmaz. T nin üzerine olduğunu görmek için, $z_2 \in G_2$ keyfi bir nokta ve $\tilde{\gamma}_2$; G_2 de başlangıç noktası a_2, bitim noktası z_2 olan bir yol olsun. $\gamma = \tau_2 \circ \tilde{\gamma}_2$ ve $\tilde{\gamma}_1$ i, γ nın bir a_1 -yükseltilmesi olarak alınsın. O halde $T \circ \tilde{\gamma}_1$, G_2 de başlangıç noktası a_2 olan bir yoldur ve $\tau_2 \circ T \circ \tilde{\gamma}_1 = \gamma$ dır. Eğrilerin yükseltilmesinin bir tek olması nedeniyle $T \circ \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ olur. Böylece $z_2 = \tilde{\gamma}_2(1) = T(\tilde{\gamma}_1(1))$ olur, yani T üzerinedir. 2.3.8. Yardımcı Teorem gereği T bir yerel homeomorfizmdir.

b) G_1 basit bağlantılı olduğu için 2.3.10 Teorem gereği $T(a_1) = a_2$ olacak biçimde bir tek $T : G_1 \to G_2$ homomorfizmi vardır.

c) $T : G_1 \to G_2$, $T(a_1) = a_2$ özelliğinde bir homomorfizm olsun. O halde $S \circ T$, a_1 noktasını sabit bırakan G_1den kendi içine bir homomorfizmdir. 2.3.9. Önerme gereği S, T nin tersi olmak üzere $S \circ T$, G_1 in özdeşlik homomorfizmidir ve böylece T nin mutlaka bir izomorfizm olması gerektiği görülür.

□

2.3.15. Tanım. Ω nın basit bağlantılı örtü uzayına Ω nın *evrensel örtü uzayı* denir.

2.3.16. Uyarı. 2.3.14. Önerme ve 2.3.15. Tanım birleştirilecek olursa Ω nın örtü uzayının var olması basit bağlantılı olmasını gerektirmez. Ancak basit bağlantılı bir örtü uzayının varlığı, evrensel örtü uzayının tekliğini garanti eder. Dikkat edilirse bu durum

2.3.14. Önerme ile incelenmiştir. Dolayısıyla "evrensel" kelimesinin nedeni Ω nın varsa basit bağlantılı örtü uzayının bir tek olmasındandır. Düzlemin alt kümeleri için bir evrensel örtü uzayının varlığı, konunun ilerleyen kısmında ele alınacaktır.

2.3.17. Sonuç. (G, τ), Ω nın evrensel örtü uzayı ve $a_1, a_2 \in G$, $\tau(a_1) = \tau(a_2)$ özelliğinde iki nokta ise bu takdirde $Aut(G, \tau)$ da $T(a_1) = a_2$ özelliğinde bir tek T dönüşümü vardır.

İspat. (G, τ), Ω nın evrensel örtü uzayı olduğundan G bağlantılı aynı zamanda basit bağlantılıdır. O halde şimdi 2.3.14. Önerme sinin b) kısmını bu duruma uyarlayalım. (G, τ), Ω nın evrensel örtü uzayı olduğundan bir tektir. O halde 2.3.14. Önerme gereği $T(a_1) = a_2$ olacak biçimde bir tek $T : G \to G$ homomorfizmi vardır. Dikkat edilirse $T \in Aut(G, \tau)$ dir.

□

2.3.18. Uyarı. Böylece (G, τ), Ω nın evrensel örtü uzayı ve $z \in G$ ise bu takdirde, $T \in Aut(G, \tau)$ olduğundan $\tau^{-1}(\tau(z)) = \{T(z) : T \in Aut(G, \tau)\}$ olur.

2.3.19. Teorem. (G, τ), Ω nın evrensel örtü uzayı ise bu takdirde $Aut(G, \tau)$ grubu Ω nın temel grubu $\pi(\Omega)$ ya izomorftur.

İspat. $T \in Aut(G, \tau)$ ve $\tilde{\gamma}$; G de başlangıç noktası a_0, bitim noktası $T(a_0)$ olan herhangi bir yol olsun. $T \in Aut(G, \tau)$ olduğundan; $\gamma = \tau \circ \tilde{\gamma}$, Ω da taban noktası α_0 olan bir ilmektir. Eğer $\tilde{\sigma}$; G de başlangıç noktası a_0, bitim noktası $T(a_0)$ olan bir diğer yol ise G nin basit bağlantılı olması nedeniyle $\tilde{\sigma}$ ve $\tilde{\gamma}$, G de homotopiktir. Böylece $\tau \circ \tilde{\sigma}$ ve γ, Ω da homotopik olurlar. Bu ise her bir $T \in Aut(G, \tau)$ için $\pi(\Omega)$ da iyi tanımlı bir γ_T elemanının bulunduğunu gösterir. $Aut(G, \tau) \cong \pi(\Omega)$ olduğunu göstermek için $T \mapsto \gamma_T$ dönüşümünün $Aut(G, \tau)$ nun $\pi(\Omega)$ üzerine bir anti-izomorfizmi olduğunu göstermek yeterlidir. Burada anti öneki çarpımın sırasının değiştirildiğini gösterir. Böylece $T \to \gamma_T^{-1}$ dönüşümü yardımıyla iki grup izomorf olur.

O halde S ve T örtü uzayının iki otomorfizmi olsun. İlk olarak yukarıdaki dönüşümün işlem koruduğunu görelim, bunun için $\gamma_{ST} = \gamma_T \gamma_S$ olduğu gösterilmelidir. $\tilde{\gamma}$ ve $\tilde{\sigma}$ yolları G de başlangıç noktaları a_0 olan ve bitim noktaları sırasıyla $T(a_0)$ ve $S(a_0)$ olan iki yol olsun. O halde $\gamma_T = \tau \circ \tilde{\gamma}$ ve $\gamma_S = \tau \circ \tilde{\sigma}$ dır. Böylece $S \circ \tilde{\gamma}$, G de başlangıç noktası a_0 ve bitim noktası $S(T(a_0))$ olan bir yol olduğu bulunur. Bu nedenle

$$\gamma_{ST} = \tau \circ [\,(S \circ \tilde{\gamma}\,)\tilde{\sigma}\,] = [\,\tau \circ (S \circ \tilde{\gamma}\,)][\,\tau \circ \tilde{\sigma}\,] = \gamma_T \gamma_S$$

olur.

Dönüşümün bire-bir ve üzerine olduğu gösterilerek ispat bitecek. Buna göre $\gamma \in \pi(\Omega, \alpha_0)$ ve $\tilde{\gamma}$, γ nın bir a_0 - yükseltilmesi olsun. 2.3.17. Sonuç gereği $T(a_0) = \tilde{\gamma}(1)$ olacak biçimde bir tek T otomorfizmi vardır. Buradan $\gamma_T = \gamma$ olduğu bulunur. O halde $T \to \gamma_T$ üzerine bir dönüşümdür.

Son olarak dönüşümün bire-bir olduğunu gösterelim. $T \in Aut(G, \tau\,)$ ve Ω da $\gamma = \gamma_T \sim 0$ olsun. $\tilde{\gamma}$ da γ nın bir a_0 - yükseltilmesi olarak alınsın. O halde $T(a_0) = \tilde{\gamma}(1)$ dir. Böylece $\gamma \sim 0$ olduğundan γ, α_0 - sabit yoluna homotopiktir. Diğer yandan Soyut Monodromy Teoremi gereği α_0 nın a_0 - yükseltilmesinin ve γ nın bitim noktaları aynı noktadır. α_0 - sabit yolunun a_0 - yükseltilmesi α_0 - sabit yolu olduğundan $T(a_0) = a_0$ dır. 2.3.9. Önerme gereği T bir özdeşlik otomorfizmidir.

□

2.4. Analitik Örtü Uzayları

Bu bölümde analitik örtü uzayları ele alınıp, bu duruma uygun birkaç sonuç elde edilecektir. Burada Ω ve G düzlemde iki bölge ve $\tau : G \to \Omega$ aynı zamanda bir örtü dönüşümü olan analitik bir fonksiyon olarak alınacaktır. 2.3.8. Yardımcı Teorem gereği,

2.4.1. Sonuç 1. (G, τ), Ω nın bir analitik örtü uzayı, H düzlemin bir açık alt kümesi, $f : H \to \Omega$ analitik bir fonksiyon ve $T : H \to G$ sürekli fonksiyonu $\tau \circ T = f$ özelliğinde olsun. Bu takdirde T analitiktir.

2. (G_1, τ_1) ve (G_2, τ_2), Ω nın analitik iki örtü uzayı ve $T : G_1 \to G_2$ bir homomorfizm olsun. Bu takdirde T analitiktir.

3. (G, τ), Ω nın analitik örtü uzayı olsun. Bu takdirde $Aut(G, \tau)$ daki her bir fonksiyon G nin bir konform denkliğidir. Ayrıca (G_1, τ_1) ve (G_2, τ_2), Ω nın analitik iki örtü uzayı ve $T : G_1 \to G_2$ bir izomorfizm ise bu takdirde T bir konform denkliktir.

Bu sonuçlar tamamen 2.3.8. Yardımcı Teoreminin birer sonucudur.

2.4.2. Sonuç. $\tau : \mathbb{D} \to \Omega$ analitik örtü dönüşümü $\tau(0) = \alpha_0$ ve $\tau'(0) > 0$ özelliğinde ise bu takdirde bu özelliği sağlayan τ dönüşümü bir tektir.

İspat. Bu özelliği sağlayan diğer bir dönüşüm $\mu : \mathbb{D} \to \Omega$ olsun. 2.3.14. Önerme gereği örtü uzaylarının $f : (\mathbb{D}, \tau) \to (\mathbb{D}, \mu)$ izomorfizmi $f(0) = 0$ olacak biçimde vardır. Önceki sonuç gereği f, diskin kendi üzerine bir konform denkliğidir ve böylece f mutlaka bir Möbiüs dönüşümüdür. f, $f(0) = 0$ ve $f'(0) > 0$ özelliğinde olduğundan dolayı her z için $f(z) = z$ olmalıdır. Çünkü $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ olduğundan $z = -1$ olamaz. O halde bu özelliği sağlayan τ dönüşümü bir tektir. □

2.4.3. Sonuç. (G, τ), Ω nın analitik örtü uzayı, X düzlemde bir bölge ve $f : X \to \Omega$ fonksiyonu $f(x_0) = \alpha_0 = \tau(a_0)$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer X basit bağlantılı ise bu takdirde $f = \tau \circ T$ ve $T(x_0) = \alpha_0$ olacak biçimde bir tek $T : X \to G$ analitik fonksiyonu vardır.

İspat. 2.3.10. Teorem yardımıyla T nin varlığı ve tekliği açıktır. Diğer yandan istenilen özellikteki T nin analitik olması gerektiği ise 2.4.1. Sonuç tan görülür.

□

2.4.4. Tanım. Ω nın basit bağlantılı analitik örtü uzayına Ω nın *evrensel analitik örtü uzayı* denir.

2.4.5. Uyarı. Evrensel analitik örtü uzayı, evrensel örtü uzayının özel bir hali olduğu için önceki kısımda verilen tüm özellikler burada da geçerlidir.

2.4.6. Önerme. (G, τ) çifti $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemin bir evrensel analitik örtü uzayıdır $\Leftrightarrow$ $G = \mathbb{C}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere belli bir a, b kompleks sayı çifti için $\tau(z) = e^{az+b}$ dir

İspat. $(\Leftarrow)$: $a \neq 0$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{C}$ ise $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto az+b$ biçiminde tanımlanan T, Möbiüs dönüşümü olup üzerinedir. $\tau(z) = e^z \circ (az+b)$ biçiminde düşünülebilir. Üstel fonksiyon ve Möbiüs dönüşümleri $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemi üzerinde sürekli olduğundan τ da sürekli olup τ^{-1} de aynı gerekçelerle süreklidir. T ve üstel fonksiyon $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemi üzerinde bire-bir ve örten olup $\tau(z)$ bir homeomorfizmdir. Böylece (G, τ) çifti $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemin bir örtü uzayı olur. Diğer yandan $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemi basit bağlantılı olduğundan (G, τ) çifti $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemin bir evrensel analitik örtü uzayı olur.

$(\Rightarrow)$: G, $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge ve (G, τ) çifti $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemin bir örtü uzayı olsun. $(\mathbb{C}, e^z)$ nin $\mathbb{C}_0$ delinmiş düzlemin bir örtü uzayı olduğu görülmüştü dolayısıyla 2.3.14. Önerme ve 2.4.2 Sonuç gereği her $z \in \mathbb{C}$ için bir $h : \mathbb{C} \to G$ konform denkliği $e^z = \tau(h(z))$ olacak biçimde vardır. O halde (Conway 1995) e göre $G = \mathbb{C}$ dir ve $a \neq 0$ ve a, $b \in \mathbb{C}$ olmak üzere $h(z) = az+b$ olup $\tau(z) = e^{az+b}$ olur.

□

2.4.7. Örnek. $\rho = e^{\pi}$ olmak üzere $\Omega = \{ z : 1 < | z | < \rho \}$ halkasını göz önüne alalım. Eğer $\tau(z) = e^{i\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{\pi}{2}}$ olarak alınırsa $(\mathbb{D}, \tau)$ ikilisi Ω için evrensel analitik örtü uzayı olur. (Conway 1995)

3.BÖLÜM

MODÜLER GRUP VE ÖRTÜ UZAYLARI

3.1. Modüler Fonksiyon

Bu kısımda özel bir analitik fonksiyon olan modüler fonksiyon ele alınacaktır. İlk olarak Γ modüler grup tanıtılıp bazı temel özellikleri incelenecektir.

3.1.1. Tanım. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki Möbiüs dönüşümlerine *modüler dönüşüm*, tüm modüler dönüşümlerin kümesine *modüler grup* denir ve Γ ile gösterilir.

3.1.2. Önerme. Γ, fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir gruptur.

İspat. Sırasıyla $ad - bc = 1$ ve $a'd' - b'c' = 1$ olmak üzere

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ ve } T(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. İlk olarak, $M \circ T \in \Gamma$ olduğu görülmelidir.

$$M \circ T\,(z) = \frac{a\left(\dfrac{a'z+b'}{c'z+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{a'z+b'}{c'z+d}\right)+d} = \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')}$$

olup

$$\begin{aligned}
&(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')\\
&=(aca'b'+ada'd'+bcb'c'+bdc'd')-(aca'b'+adb'c'+bca'd'+bdc'd')\\
&=ad(a'd'-b'c')-bc(a'd'-b'c')\\
&=1
\end{aligned}$$

dir. O halde $M \circ T \in \Gamma$ olur. Diğer yandan direk işlem yapılarak Γ nın birleşmeli olduğu görülebilir.

Ayrıca $I\,(z) = \dfrac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} = z$ olup Γ nın birim elemanıdır. Öte yandan $ad - bc = 1$ olmak üzere keyfi bir $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in \Gamma$ dönüşümüne karşılık $M^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{-cz+a}$ olup her $z \in \mathbb{C}$ için $(M^{-1} \circ M)(z) = (M \circ M^{-1})(z) = I(z)$ dir.

O halde Γ, fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir gruptur. □

3.1.3. Uyarı. $\mathcal{U}$ ile üst yarı düzlemi, $\mathcal{L}$ ile alt yarı düzlemi gösterelim yani $\mathcal{U} = \{\, z : \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ ve $\mathcal{L} = \{\, z : \operatorname{Im} z < 0 \,\}$ olsun.

3.1.4. Teorem. Γ modüler grubu $T(z) = z + 1$ ve $S(z) = -\dfrac{1}{z}$ dönüşümleri yardımıyla üretilir. □ (Yildiz 2004)

3.1.5. Önerme. Eğer $M \in \Gamma$ ise bu takdirde $M(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ ve $M(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ olur.

İspat. $M \in \Gamma$ olsun. O halde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dir. $z_0 \in \mathbb{R}_\infty$ olarak alınırsa $M(z_0) = \dfrac{az_0+b}{cz_0+d}$ olur. O halde $M(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$ olur. $M \in \Gamma$ ve $ad - bc = 1$ olduğundan $z = x + iy$ olmak üzere $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{ax+b+iay}{cx+d+icy}$ olarak yazılırsa

$$\operatorname{Im} M(z) = \frac{1}{|cz+d|^2}\,\operatorname{Im} z \qquad (\,\mathrm{I}\,)$$

olur. Eğer $z \in \mathcal{U}$ ise $\operatorname{Im} z > 0$ olacağından $\dfrac{1}{|cz+d|^2}\operatorname{Im} z > 0$ olur, bu ise $M(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ olduğunu gösterir.

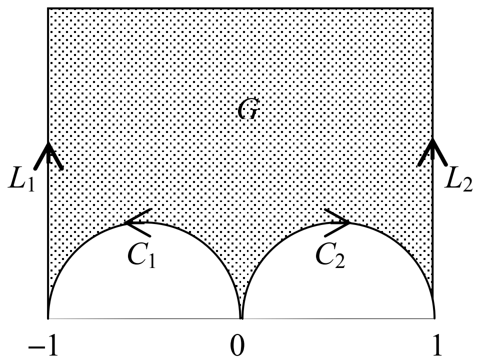
□

3.1.6. Uyarı. Γ nın $S(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ ve $T(z) = z + 2$ (II)

dönüşümleri yardımıyla üretilen alt grubunu $\mathcal{G}$ ile gösterelim. Ayrıca G ile

$$G = \{ z \in \mathcal{U} : -1 \leq \operatorname{Re} z < 1, \ |2z+1| \geq 1, |2z-1| > 1 \} \qquad \text{(III)}$$

kümesini gösterelim ve yönlendirmeyi şekildeki gibi yapalım.



Şekil 3.1.1. G kümesi

$\operatorname{Re} z = -1$ doğrusunu L_1 ile

$\operatorname{Re} z = 1$ doğrusunu L_2 ile

$|2z+1| = 1$ çemberini C_1 ile

$|2z-1| = 1$ çemberini C_2 ile

gösterelim. Dikkat edilirse $G \cap \mathbb{R} = \phi$ dir. Bu bölge ve özellikleri konunun ilerleyen kısımlarında kullanılacaktır.

3.1.7. Örnek. S dönüşümü ve G kümesi yukarıdaki gibi olmak üzere G kümesinin S dönüşümü altındaki resmini elde etmeye çalışalım. Bunun için Yönlendirme Prensibini kullanacağız. O halde S dönüşümü altında 0, -1, 1 ve ∞ noktalarının görüntülerini bulalım. $S(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ olmak üzere

$$S(0) = \frac{0}{2 \cdot 0 + 1} = 0$$

$$S(-1) = \frac{-1}{-2+1} = 1$$

$$S(1) = \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

$$S(\infty) = \frac{1}{2}$$

olur.

Möbiüs dönüşümleri çemberleri çemberlere resmettiği ve doğruların da sonsuz yarıçaplı çemberler olarak kabul edildiği göz önüne alınırsa Yönlendirme Prensibi gereği

L_1 doğrusu C''' çemberine

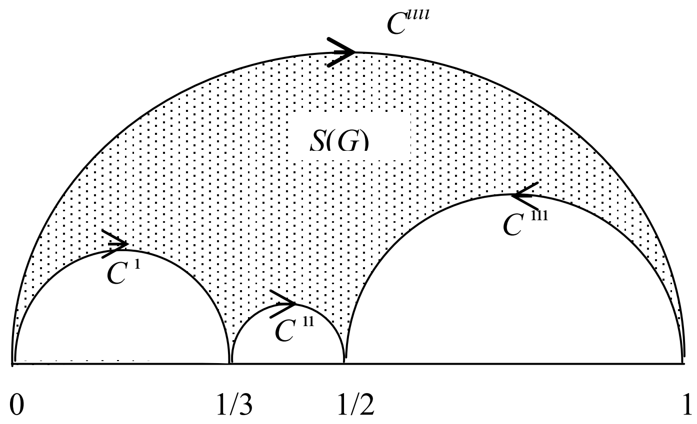
L_2 doğrusu C'' çemberine

C_1 çemberi C'''' çemberine

C_2 çemberi C' çemberine

resmedilir. O halde $S(G)$ = {ξ : Imξ>0, $|2\xi-1|\leq 1, |4\xi-3|\geq 1, |6\xi-1|>1, |12\xi-5|>1$}

olur. Dikkat edilirse $S(G) \cap G = \phi$ dir.



Şekil 3.1.2. G kümesinin S altındaki görüntüsü

3.1.8. Yardımcı Teorem. G ve $\mathcal{G}$, (II) ve (III) de verildiği gibi olsun.

a) Eğer M_1 ve $M_2 \in \mathcal{G}$ ve $M_1 \neq M_2$ ise $M_1(G) \cap M_2(G) = \phi$ dir.

b) $\mathcal{U} = \bigcup \{ M(G) : M \in \mathcal{G} \}$

c) $\mathcal{G}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere Γ nın $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki dönüşümlerinin içerisinde a ve d tek, b ve c çift tamsayı olan dönüşümlerden oluşur.

İspat. G_1, lemmanın c) kısmında belirtilen tüm modüler dönüşümlerin kümesi olsun. S ve T dönüşümleri (II) da verildiği gibi tanımlansın. $S(z) = \dfrac{z+0}{2z+1}$, $T(z) = \dfrac{z+2}{0\cdot z+1}$ olduğundan bu dönüşümler de G_1 in elemanları olur, çünkü $a = d = 1$ ve $b = 0$, $c = 2$ dir. Benzer şekilde $T(z) \in G_1$ olur. G_1 in fonksiyonların bileşkesi işlemine göre bir grup olduğu gösterilmelidir. Bu halde $G \subseteq G_1$ olacaktır. Bunun için $(2k+1)(2q+1) - 4pt = 1$ ve $(2k'+1)(2q'+1) - 4p't' = 1$ olmak üzere

$$U_1(z) = \frac{(2k+1)z+2t}{2pz+(2q+1)} \text{ ve } U_2(z) = \frac{(2k'+1)z+2t'}{2p'z+(2q'+1)}$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. $U_1 \circ U_2^{-1} \in G_1$ olduğu görülmelidir.

$$(U_1 \circ U_2^{-1})(z) = \frac{(2k+1)z+2t}{2pz+(2q+1)} \circ \frac{(2q'+1)z-2t'}{2p'z+2k'+1} = \frac{(2k+1)\left[\dfrac{(2q'+1)z-2t'}{2p'z+(2k'+1)}\right]+2t}{2p\left[\dfrac{(2q'+1)z-2t'}{2p'z+(2k'+1)}\right]+(2q+1)}$$

$$= \frac{(4kq'+2k+2q'+1+4tp')z-4kt'-2t'+4tk'+2t}{(4pq'+2p+4qp')z-4pt'+4qk'+2k'+2q+1}$$

Eğer,

$$A = 4kq'+2k+2q'+1+4tp'$$
$$B = -4kt'-2t'+4tk'+2t$$
$$C = 4pq'+2p+4qp'$$
$$D = -4pt'+4qk'+2k'+2q+1$$

denirse A ve D tek, B ve C çift tamsayı olur, o halde $G \subseteq G_1$ dir.

İlk olarak M_1 ve $M_2 \in G_1$ ve $M_1 \neq M_2$ ise $M_1(G) \cap M_2(G) = \phi$ olduğunu gösterelim. G_1 grup olduğundan bu iddiayı doğrulamak için $M \in G_1$ ve $M \neq I$ ise $G) \cap G = \phi$ olduğunu görmek yeterlidir. Bu durumda iki hal ortaya çıkar.

İlk olarak, $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünde $c = 0$ olması durumu olur ki bu halde a ve d tek, b çift tamsayı olmak üzere M dönüşümü $M(z) = \dfrac{az+b}{d}$ biçimindedir.

$1 = ad - bc = ad$ olduğundan $a = d = \pm 1$ olmalıdır. O halde $M(z)$ dönüşümü $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $M(z) = z + 2n$ biçimindedir. $M \neq I$ olduğundan $n \neq 0$ dır. Dikkat edilirse M, $2n$ kadarlık bir kaymadır. Böylece $M(G) \cap G = \phi$ olur.

İkinci olarak, $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünde $c \neq 0$ olması durumunu göz önüne alalım. Dikkat edilirse $\overline{B}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ kapalı diski G ile kesişen ve -1, 0, 1 noktalarının hiç birini iç nokta olarak bulundurmayan kapalı bir disktir. Ancak merkezi reel eksen üzerinde kalan ve G ile kesişen diğer herhangi bir kapalı disk bu noktalardan en az birisini iç nokta olarak bulundurur. O halde b bir çift sayı ve $S(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ olmak üzere eğer $M(z) \neq S(z) + b$ ise bu takdirde her $z \in G$ için $|cz+d| > 1$ olmalıdır. Gerçekten de, eğer G de $|cz+d| \leq 1$ özelliğinde bir nokta olsaydı $\overline{B}\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{1}{|c|}\right) \cap G \neq \phi$ olurdu. Bir an için bu kapalı diskin $\overline{B}\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ diski olmadığını kabul edelim. Bu durumda yukarıda ele alındığı gibi, -1, 0, 1 noktalarından biri $\overline{B}\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{1}{|c|}\right)$ diskinin elemanı olurdu. Bu tamsayıları k ile gösterirsek $\left|k + \dfrac{d}{c}\right| < \dfrac{1}{|c|}$ ve böylece $|kc+d| < 1$ olurdu. Ancak c çift, d tek olduğundan $kc + d$ tek olur ki bu bir çelişkidir. O halde her $z \in G$ için

$$|cz + d| > 1 \qquad \text{(IV)}$$

olduğundan $-\dfrac{d}{c} \neq -\dfrac{1}{2}$ veya $-\dfrac{1}{|c|} \neq -\dfrac{1}{2}$ olduğu görülür. Bir Möbiüs dönüşümünde dönüşümün her bir terimini belli bir sabit ile çarpılması dönüşümü değiştirmeyeceğinden $c = 2$ ve $d = 1$ olarak kabul edilebilir. M nin determinantının 1 olması gerektiğinden $a - 2b = 1 \Rightarrow a = 1 + 2b$ olur. O halde

$$M(z) = \frac{az+b}{2z+1} = \frac{z+2bz+b}{2z+1} = S(z) + b,$$

yani $M(z) \neq S(z) + b$ olması halinde (IV) sağlanır.

Dikkat edilirse (II) gereği (III) deki gibi $S(z)$ için $M(z) \neq S(z) + b$ ve b çift tamsayı ise bu takdirde her $z \in G$ için Im M(z) < Im z olur.

G nin tanımı ve (II) gereği $M(z) = S(z) + b$ olması halinde de Im M(z) $\leq$ Im z olur.

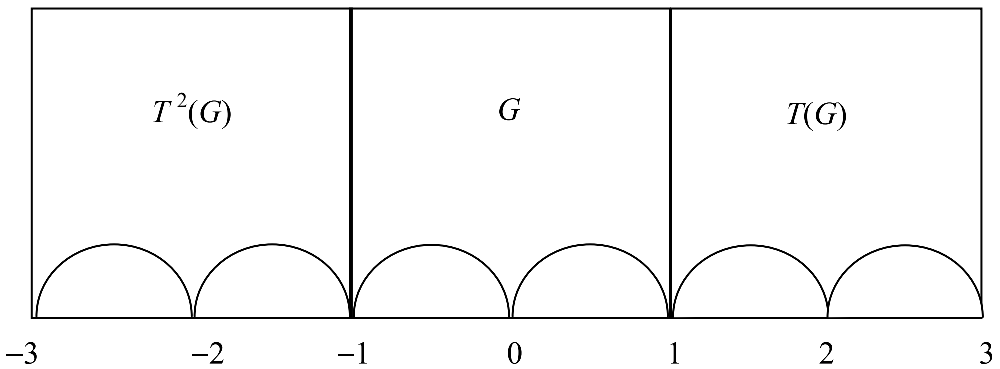
Şimdi M, $\mathcal{G}_1$ in keyfi bir elemanı olsun. Bu durumda M ya da M^{-1}, $S(z) + b$ biçiminde olamaz. Çünkü M (M^{-1}) in bu formda olduğunu kabul edersek $M^{-1}(M)$ bu formda olamaz.

O halde her $z \in G$ için ya Im M(z) < Im z ya da Im M^{-1}(z) < Im z olur. Bir an için ilk durumun geçerli olduğunu kabul edelim. Eğer $M(G) \cap G$ de bir z elemanı bulunsaydı

$$\text{Im}\, z = \text{Im}\, MM^{-1}(z) < \text{Im}\, M^{-1}(z) \leq \text{Im}\, z$$

olurdu ki bu bir çelişkidir. O halde $M(G) \cap G = \varnothing$ dir.

Şimdi ise $L = \cup\{\, M(G) : M \in \mathcal{G}\} \subseteq \mathcal{U}$ olsun. Eğer $T(z) = z + 2$ ise bu takdirde $T^n(z) = z + 2n$ olur. O halde her bir $n \in \mathbb{Z}$ için L, G nin $2n$ birim ötelemesi olan $T^n(G)$, Y yi kapsar.



Şekil 3.1.3 G bölgesi ve görüntüleri

Dikkat edilirse 3.1.7. Örnek teki yöntemle S dönüşümünün $|2z+1| = 1$ çemberini $|2z-1| = 1$ çemberine resmettiği görülebilir.

Bu son iki sonucu birleştirerek ve Şekil 3.1.3 göz önüne alınarak, k tek tamsayı olmak üzere,

$$L;\ |2z-k| \geq 1 \text{ özelliğindeki tüm } z \in \mathcal{U} \text{ noktalarını bulundurur.} \qquad \text{(V)}$$

$\xi \in \mathcal{U}$ belli bir nokta olsun. $\{c\xi + d : c, d \in \mathbb{Z}, c, d$ belli bir M nin katsayıları$\}$ kümesinin düzlemde bir yığılma noktası bulunmadığından, bu kümenin bir en küçük modüle sahip olan elemanı vardır. Böylece her $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{G}$ için bir $|c_0\xi + d_0| \le |c\xi + d|$ özelliğinde $M_0(z) = \dfrac{a_0 z + b_0}{c_0 z + d_0}$ dönüşümü vardır. O halde (I) gereği her $M \in \mathcal{G}$ için $\operatorname{Im} M_0(\xi) \ge \operatorname{Im} M(\xi)$ olduğu elde edilir. $z = M_0(\xi)$ yazarak ve $M \in \mathcal{G}$ olduğunda $MM_0 \in \mathcal{G}$ olduğu dikkate alınarak

$$\text{Her } M \in \mathcal{G} \text{ ve } z = M_0(\xi) \text{ için } \operatorname{Im} z \ge \operatorname{Im} M(z) \qquad \text{(VI)}$$

olduğu elde edilir.

$n \in \mathbb{Z}$ olsun. Belli bir $\xi \in \mathcal{U}$ için $z = M_0(\xi)$ almaya devam edelim. (I) i uygulayarak ve (VI) yı kullanarak

$$\operatorname{Im} z \ge \operatorname{Im} ST^{-n}(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{|2z - 4n + 1|^2}$$

elde edilir.

Şimdi ise (VI) yı $M = S^{-1}T^{-n}$ dönüşümüne uygulayalım. O halde

$$\operatorname{Im} z \ge \frac{\operatorname{Im} z}{|-2z + 4n + 1|^2}$$

olur.

Ancak $\operatorname{Im} z > 0$ olduğundan bu eşitsizlikler her $n \in \mathbb{Z}$ için $|2z - 4n + 1| \ge 1$ ve $|2z - 4n - 1| \ge 1$ haline dönüşür. $\{ 4n - 1, 4n + 1 : n \in \mathbb{Z} \}$ kümesi tüm tek sayıların ailesi olduğundan (V) gereği $z = M_0(\xi) \in L$ olur. Böylece $\xi = M_0^{-1}(z) \in M_0^{-1}(L)$ olur. ξ keyfi olduğundan b) önermesinin doğruluğu görülmüş olur.

İspatın başında $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1$ olduğu görülmüştü. Şimdi ise ters kapsamayı görmeye çalışalım. Buna göre $M_1 \in \mathcal{G}_1$ olsun. b) önermesi gereği $\mathcal{G}$ de bir M dönüşümü $M(G) \cap M_1(G) \neq \phi$ olacak biçimde vardır. Ancak hem M hem de M_1, $\mathcal{G}$ de olduğundan $M_1 = M \in \mathcal{G}$ olur ki bu da c) önermesinin doğru olduğunu gösterir.

□

Şimdi ise bu kısmın temel sonucunu ele alalım. Aksi belirtilmedikçe $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \equiv \mathbb{C}_{0,1}$ olarak alınacaktır.

3.1.9. Teorem. Eğer G ve $\mathcal{G}$ sırasıyla (II) ve (III) de verildiği gibi ise bu takdirde aşağıdaki özellikleri sağlayan analitik bir $\lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır:

a) Her $M \in \mathcal{G}$ için $\lambda \circ M = \lambda$ olur,

b) λ, $\mathcal{G}$ üzerinde bire-bir ve analitiktir,

c) $\lambda(\mathcal{U}) = \mathbb{C}_{0,1}$,

d) λ, $\mathcal{U}$ daki bir has alt bölge üzerinde analitik değildir.

e) $(\mathcal{U}, \lambda)$, $\mathbb{C}_{0,1}$ in bir örtü uzayıdır.

İspat. $G_0 = \{ z : \mathrm{Im}\, z > 0,\ 0 < \mathrm{Re}\, z < 1 \text{ ve } |\, 2z - 1\,| > 1 \}$ olsun. O halde $G_0 \subseteq G$ dir. $f_0 : G_0 \to \mathcal{U}$ herhangi bir konform denklik olsun. f_0 fonksiyonunu $\overline{G_0} \cup \{\infty\}$ dan $\overline{\mathcal{U}} \cup \{\infty\}$ üzerine olan bir homeomorfizme genişletilebiliriz.

A ise $A(f_0(0)) = 0$, $A(f_0(1)) = 1$, $A(f_0(\infty)) = \infty$ özelliğinde bir Möbiüs dönüşümü olsun. Bu nedenle $f = A \circ f_0$, sabit noktaları 0, 1, ∞ olan, $\overline{G_0} \cup \{ \infty \}$dan $\overline{\mathcal{U}} \cup \{ \infty \}$ üzerine bir homeomorfizmdir ve bu G_0 ın $\mathcal{U}$ üzerine bir konform denkliğidir. f fonksiyonu ∂G_0 üzerinde gerçel değerli olduğundan f fonksiyonunu $\mathrm{Re}\, z = 0$ doğrusu boyunca yansıma olarak düşünerek $\overset{o}{G}$ kümesine genişletebiliriz. f nin bu genişletilmiş versiyonu, $x + iy \in G_0$ için $f(x + iy) = \overline{f(-x + iy)}$ özelliğini gerçekler. Dikkat edilirse f, $|2z - 1| = 1$ ve $|2z + 1| = 1$ çemberlerinin $\overline{G}$ da kalan kısımları üzerinde de gerçel değerlidir. Dolayısıyla uygun yansımalar yardımıyla f yi üst yarı düzleme genişletmek de mümkündür.

Aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$L_1 = \{ z : \mathrm{Im}\, z \geq 0,\ \mathrm{Re}\, z = 0 \} \cup \{ \infty \}$$

$$L_2 = \{ z : \mathrm{Im}\, z \geq 0,\ |2z - 1| = 1 \}$$

$$L_3 = \{ z : \mathrm{Im}\, z \geq 0,\ \mathrm{Re}\, z = 1 \} \cup \{ \infty \}$$

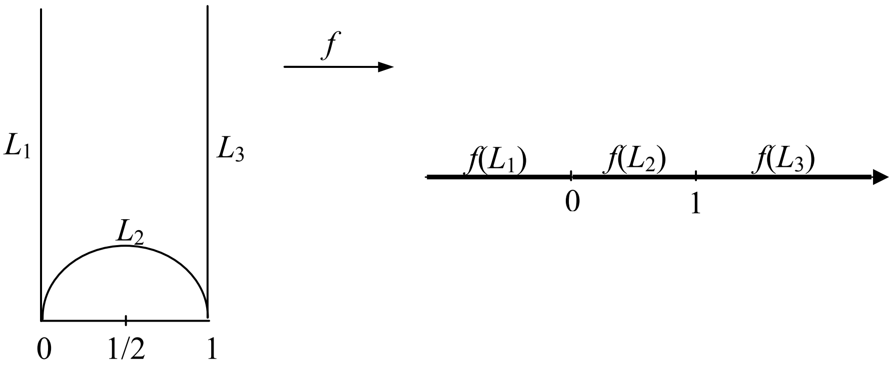
O halde $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \partial_\infty G_0$ olur. $j = 1, 2, 3$ için L_j bağlantılı olup $f(L_j)$ de bağlantılıdır. Yönlendirme prensibi yardımıyla

$$f(L_1) = \{ z : z = \mathrm{Re}\, z \leq 0 \} \cup \{ \infty \}$$

$$f(L_2) = \{\, z : z = \operatorname{Re} z,\ 0 \le z \le 1 \,\}$$

$$f(L_3) = \{\, z : z = \operatorname{Re} z \ge 1 \,\} \cup \{\, \infty \,\}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.1.4 L_i doğruları ve f altındaki resimleri

Böylece

$$f(\overset{o}{G}) = \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \text{ ve } f(\,G\,) = \mathbb{C}_{0,1} \equiv \Omega$$

olur.

$M \in \mathcal{G}$ ve $z \in M(G)$ olmak üzere, f fonksiyonunu $\lambda(z) = f(M^{-1}(z))$ olarak alarak $\lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna genişletelim. 3.1.8. Yardımcı Teorem gereği bu fonksiyon iyi tanımlıdır.

λ analitik fonksiyondur. Gerçekten de eğer S ve T dönüşümleri (II) de tanımlandığı gibi alınırsa λ, $V \equiv [G \cup T^{-1}(\overset{o}{G}) \cup S^{-1}(G)]$ kümesi üzerinde analitik olur. Ayrıca V, G yi kapsayan açık bir kümedir. Böylece her $M \in \mathcal{G}$ için λ, $M(G)$ nin bir komşuluğu üzerinde analitik olur. O halde λ, $\mathcal{U}$ nun tamamında analitiktir.

λ nın tanımı gereği teoremin a) şıkkı sağlanır. Çünkü f, G üzerinde bire birdir, dolayısıyla b) şıkkı da sağlanmış olur. Kompleks fonksiyonlar teorisinde analitik ve aynı zamanda bire bir olan fonksiyonlar ünivalent (yalınkat) olarak adlandırılırlar (Başkan 1998). O halde λ, $\mathcal{G}$ üzerinde ünivalent (yalınkat) bir fonksiyondur. $f(\,G\,) = \Omega$ olduğundan c) şıkkı da sağlanmıştır.

Şimdi de λ nın, $\mathcal{U}$ daki bir has alt bölge üzerinde analitik olmadığını görelim. Bunun için $\{ M(0) : M \in \mathcal{G} \}$ kümesinin $\mathbb{R}$ de yoğun olduğunu görmek yeterlidir.

$M \in \mathcal{G}$ ve M dönüşümü, $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ biçiminde olsun. O halde

$$M(0) = \frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = \frac{b}{d}$$

dir, yani b ve c çift, a ve d tek tamsayılardır. İddiayı doğrulamak için b ve d nin ortak böleni olmamak üzere verilen her çift b ve tek d sayısına karşılık $ad - bc = 1$ olacak biçimde a tek ve c çift tamsayılarını bulmak yeterlidir. Denk olarak $2m + 1$ ve $2n$ nin ortak böleni olmamak üzere verilen her m ve n tamsayılarına karşılık

$$\begin{aligned} 1 &= (2p+1)(2m+1) - (2n)(2q) \\ &= 4pm + 2m + 2p + 1 - 4nq \end{aligned}$$

özelliğinde p ve q tamsayılarını bulmak yeterlidir. Bunun gerçekleşmesi ancak ve ancak p ve q tamsayılarının bulunabilmesi demektir, dolayısıyla

$$-m = p(2m+1) - (2n)q$$

olur. Ancak; $2m + 1$ ve $2n$ nin ortak böleni olmadığından $\{ p(2m+1) - (2n)q : p, q \in \mathbb{Z} \}$

kümesi $\mathbb{Z}$ nin tamamını üretir, yani $\{ M(0) : M \in \mathcal{G} \}$ kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur.

Son olarak e) şıkkını görelim. $\xi \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ olsun ve $\delta > 0$ sayısı $B = B(\xi; \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ olacak biçimde yeterince küçük seçilsin. U_0 ile $U_0 = f^{-1}(B) \subseteq \overset{o}{G}$ kümesini gösterelim. Dikkat edilirse $\lambda^{-1}(B) = \cup \{ M(U_0) : M \in \mathcal{G} \}$ olup $\{ M(U_0) : M \in \mathcal{G} \}$ kümesi $\lambda^{-1}(B)$ in bileşenleri olur. $\xi = t \in [0, 1]$ olduğunu kabul edip $\delta > 0$ sayısını $B = B(t; \delta) \subseteq \mathbb{C}_{0,1}$ olacak biçimde yeterince küçük seçelim. Burada z_+ ile $z \in \mathcal{U}$ özelliğindeki noktaları, z_- ile $z \in \mathcal{L}$ özelliğindeki noktaları ve $-\mathcal{U}$ ile alt yarı düzlemi gösterelim.

f, $\overline{G_0} \cup \{ \infty \}$ dan $\overline{\mathcal{U}} \cup \{ \infty \}$ üzerine bir yansıma homeomorfizmi olarak düşünülürse $| 2z_{\pm} \mp 1 | = 1$ olmak üzere $f^{-1}(B)$, $z_{\pm} \in U_{\pm}$ olmak üzere U_+ ve U_- bileşenlerinden oluşur. O halde $f(U_{\pm}) = B \cap (\pm\mathcal{U})$ olur. Eğer $S(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ olarak alınırsa bu dönüşümün $|\ 2z + 1\ |$ çemberini $|\ 2z - 1\ | = 1$ çemberi üzerine resmettiğini daha önce görmüştük. $t = f(z_{\pm}) = \lambda(z_{\pm}) = \lambda(S(z_{\pm}))$ olduğundan $S(z_{-}) = z_{+}$ olduğu bulunur. Böylece $U_0 \equiv U_{+} \cup S(U_{-})$, z_{+} ın bir açık komşuluğudur ve $\lambda(U_0) = f(U_{+}) \cup \lambda(S(U_{-})) = f(U_{+}) \cup f(U_{-}) = B$ olur. Bu nedenle $\{\ M(U_0) : M \in G\ \}$, $\lambda^{-1}(B)$ nin bileşenleri olup λ bunların her birini homeomorf olarak B üzerine resmeder. $\xi = t \in (1, \infty)$ olması halinde de benzer işlemler yardımı ile e) nin doğru olduğu görülür.

3.1.10. Örnek. Eğer $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_{0,\,1}$ dönüşümü $\lambda\left(\dfrac{i(1-z)}{1+z}\right)$ olarak alınırsa $(\mathbb{D}, \tau)$ ikilisi $\mathbb{C}_{0,\,1}$ in analitik bir örtü uzayı olur.

3.1.11. Tanım. Yukarıdaki teoremde elde edilen λ fonksiyonuna *modüler fonksiyon* denir.

3.2. Modüler Fonksiyonun Örtü Dönüşümlerine Uygulamaları

Bu bölümde $(\mathcal{U}, \lambda)$ nın $\mathbb{C}$ nin sonsuz-yapraklı örtü uzayı olduğu görülecektir. Ayrıca bundan yararlanılarak C. E. Picard'a (1856-1941) ithaf edilen önemli iki teorem elde edilecektir.

3.2.1. Uyarı. Öncelikle temel bölge kavramı ele alınacak, ardından Γ için bir temel bölge bulunacaktır. Elde edilen bu bölgenin uygun dönüşümler yardımı ile üst yarı düzlemin bir döşemesi olduğu görülecektir. Burada $\mathcal{U}^*$ ile $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş üst yarı düzlem gösterilecektir.

3.2.2. Tanım a) Eğer **F** kümesi $\mathcal{U}^*$ ın Γ modüler grubu altındaki denk noktalarının her bir denklik sınıfından tam bir tane eleman bulunduruyor ise **F** kümesine $\mathcal{U}^*$ için Γ modüler grubunun *temel küme*si denir.
b) Eğer **F** bir temel kümeyi bulunduruyor ve $z \in$ **F** olmak üzere $S(z) \in$ **F**, $(I \neq S \in \Gamma)$ olduğunda z, **F** nin bir sınır noktası oluyor ise **F** kümesine bir *temel bölge* denir.

3.2.3. Teorem. $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$\mathbf{F} = \{z : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{1}{2}, |z| > 1\} \cup \{\infty\} \cup \{z : \mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2}, |z| \geq 1\} \cup \{z : |z| = 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$$

bölgesi $\mathcal{U}^*$ için Γ modüler grubunun bir temel bölgedir. □ (Schoeneberg 1974)

3.2.4. Uyarı. Üst yarı düzlemi döşeyebilmek için ilk olarak **F** nin Γ altındaki görüntülerinin hangilerinin **F** ye bitişik olduğu bulunması gerekir.

Γ nın

$$X : z \mapsto -\frac{1}{z}$$

$$Y : z \mapsto -\frac{1}{z+1}$$

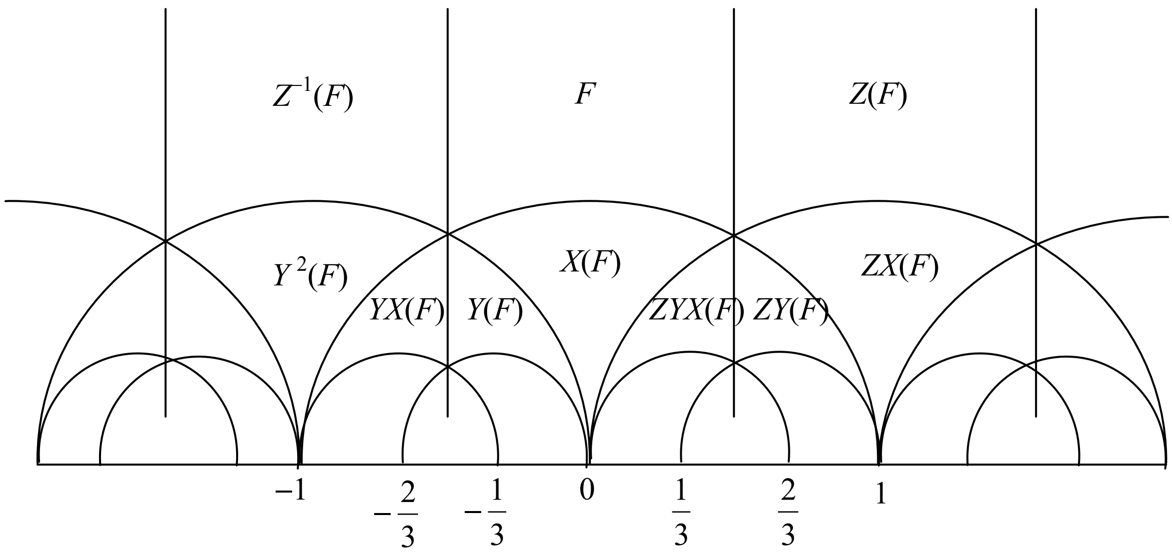
$$Z : z \mapsto z + 1$$

dönüşümleri göz önüne alınırsa; X dönüşümünün sabit noktaları $\pm\, i$, Y dönüşümünün sabit noktaları $\rho = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ve Z dönüşümünün sabit noktası ∞ olup, Jones ve Singerman a göre (1987) ye göre, X ve Y eliptik, Z parabolik bir dönüşümdür. Ayrıca

$$X^2 = Y^3,$$
$$XY = Z$$

olur.

3.2.5. Tanım. Yukarıdaki X, Y ve Z dönüşümleri ile bu dönüşümlerin bileşkelerinin **F** ye uygulanmasıyla (**F** nin bu dönüşümler altındaki resimleriyle) üst yarı düzlem kaplanır, bu işleme $\mathcal{U}$ nun döşenmesi adı verilir.



Şekil 3.2.1. Üst yarı düzlemin döşemesi

3.2.6. Uyarı. Dikkat edilirse **F** temel bölgesi Z(**F**), Z^{-1}(**F**) ve X(**F**) ile sırasıyla $\mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$ doğruları ve $|\, z\,| = 1$ çember yayı boyunca kesişir. Ayrıca ρ ve $\rho + 1$ noktaları hariç, her bir $z \in \partial$ **F** noktası **F** nin Γ altındaki tam olarak iki görüntüsünde (**F** nin kendisi dahil) bulunur. Ancak ρ ve $\rho + 1$ noktalarının her birisi (iç açıları $\frac{2\pi}{6}$ olan köşeler) **F** nin 6 tane görüntüsünde bulunur.

3.2.7. Teorem. $\lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ sonsuz yapraklı, sırasıyla i ve ρ noktalarını bulunduran $\lambda^{-1}(1)$ ve $\lambda^{-1}(0)$ yörüngeleri üzerinde 1 ve 2. mertebeden dallanma noktası olan dallanmış bir örtü dönüşümüdür. (Jones ve Singerman 1987)

3.2.8. Küçük Picard Teoremi Eğer f tam fonksiyonu iki değer almıyor ise bu takdirde f sabittir.

İspat. f nin a ve b gibi iki farklı değeri almadığını kabul edelim. Bu takdirde $f^* = \dfrac{f-a}{b-a}$ tam fonksiyonu 0 ve 1 değerlerini almaz. Dikkat edilirse f nin sabit olması için gerek ve yeter şart f^* ın sabit olmasıdır. O halde f yerine f^* yazarak f nin 0 ve 1 değerlerini almadığını kabul edebiliriz. Bu ise $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}_{0,1}$ olması demektir.

3.2.7. Teorem gereği $\lambda : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ dönüşümü aşağıdaki değişmeli diyagramda verilen dallanmamış bir örtü dönüşümü olan $\lambda : \mathcal{U} \setminus \lambda^{-1}(\{0, 1\}) \to \mathbb{C}_{0,1}$ dönüşümüne kısıtlanabilir.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \setminus \lambda^{-1}(\{0, 1\}) \arrow[dr, "\lambda"] & \\
\mathbb{C} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & \mathbb{C}_{0,1}
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.2.2. Dönüşümlerin değişmeli diyagramı

Böylece $\mathbb{C}_{0,1}$ kümesi; $\lambda^{-1}(U)$, λ tarafından U üzerine resmedilen V kümelerinin ayrık birleşimi olmak üzere U temel komşuluklarının bir birleşimi olur. $g = \lambda^{-1}: U \to V$ ters homeomorfizmlerini kullanarak, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere çok değerli

$$\lambda^{-1} \circ f : \mathbb{C} \to \mathcal{U} \setminus \lambda^{-1}(\{0, 1\})$$

fonksiyonunun yerel dallarını temsil eden $[g \circ f]_z$ analitik tohumlarının bir $\mathcal{G}$ kümesini elde ederiz. $\mathcal{G}$, basit bağlantılı $\mathbb{C}$ bölgesinde analitik devam için yeterli olsun. O halde Monodromy Teoremi gereği $\mathcal{G}$ deki herhangi bir tohum bir tek değerli analitik $h: \mathbb{C} \to \mathcal{U} \setminus \lambda^{-1}(\{0, 1\})$ fonksiyonuna genişletilebilir. Bu fonksiyon aslında yerel olarak $\lambda^{-1} \circ f$ fonksiyonunun bir dalına eşittir. O halde $\lambda \circ h = f$ olur. h tam ve $\mathbb{C}$ yi $\mathcal{U}$ içine resmeden fonksiyon olduğundan $h^* = \dfrac{h-i}{h+i}$ fonksiyonu da tam fonksiyon olup her $z \in \mathbb{C}$ için $|h^*(z)| < 1$ özelliğini sağlar. Liouville Teoremi gereği h^* sabittir; o halde h da sabittir. Böylece $f = \lambda \circ h$ fonksiyonu da sabit fonksiyon olur. □

3.2.9. Uyarı. Picard'a ithaf edilen diğer bir teorem olan Büyük Picard Teoremine hazırlık olması amacıyla aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilecektir.

3.2.10. Teorem. Eğer X düzlemde keyfi bir bölge ve

$$\mathcal{F} = \{ f : f,\ X \text{ üzerinde tanımlı } f(X) \subseteq \mathbb{C}_{0,1} \text{ özelliğinde bir fonksiyon } \}$$

ise bu takdirde $\mathcal{F}$, $C(X, \mathbb{C}_\infty)$ da bir normal ailedir. □ (Conway 1995)

3.2.11. Büyük Picard Teoremi. Eğer f fonksiyonunun $z = a$ da bir esaslı aykırılığı varsa bu takdirde $\xi \neq \alpha$ olmak üzere a nın herhangi bir delik komşuluğunda $f(z) = \xi$ eşitliğinin sonsuz çoklukta çözümü olacak şekilde bir $a \in \mathbb{C}$ sayısı vardır. □ (Conway 1995)

3.2.12. Sonuç. Eğer f fonksiyonunun $z = a$ da ayrık aykırılığı var ve eğer f tarafından sonsuz defa alınmayan 2 kompleks sayı varsa bu takdirde $z = a$ noktası ya bir kutup yeri ya da kaldırılabilir aykırılıktır. □ (Conway 1995)

3.2.13. Sonuç. Eğer f fonksiyonu polinomdan farklı bir tam fonksiyon ise bu takdirde, bir durum hariç, her bir kompleks değeri sonsuz çoklukta alır. □ (Conway 1995)

3.3. Evrensel Analitik Örtü Uzayının Varlığı

Bu bölümde daha önceden varlığı halinde tekliğini bildiğimiz evrensel analitik örtü uzayının hangi şartlarda var olduğunu belirleyeceğiz. Bunun için Üniformizasyon (Düzgünleştirme) Teoremi adı verilen teorem bu bölümün asıl amacı olup ispatı bazı ön hazırlıklar gerekmektedir. Aşağıdaki iki yardımcı teorem bu ihtiyacı gidermektedir.

3.3.1. Yardımcı Teorem. a, b, $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ noktaları $\alpha_0 \neq a$, b özelliğinde noktalar olmak üzere $\tau(0) = \alpha_0$ ve $\tau'(0) > 0$ olacak biçimde bir $\tau : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ analitik örtü dönüşümü vardır. □ (Conway 1995)

3.3.2. Yardımcı Teorem. Ω, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve belli bir $a \in G$ için (G, τ), Ω nın $\tau(a) = \alpha_0$ özelliğinde analitik bir örtü uzayı olsun. Eğer $\Delta_0 = B(\alpha_0; r_0)$, α_0 ın bir temel komşuluğu ve g_0, τ nun Δ_0 üzerinde tanımlı ve $g_0(\alpha_0) = a$ özelliğinde yerel tersi ise bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur :

a) Eğer $\tau'(a) > 0$ ise $g_0'(\alpha_0) > 0$ dır.

b) Eğer $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ yolu $\gamma(0) = \alpha_0$ özelliğinde bir yol ise bu takdirde (g_0, Δ_0) ın γ boyunca her t için $g_t(\Delta_t) \subseteq G$ olacak biçimde analitik bir $\{ (g_t, \Delta_t) : 0 \leq t \leq 1 \}$ devamı vardır.

c) Eğer (g_1, Δ_1) ve (g_2, Δ_2); (g_0, Δ_0) dan analitik devam yardımı ile elde edilmiş ve $g(\Delta) \subseteq G$ ise bu takdirde her $\omega \in \Delta$ için $\tau(g(\omega)) = \omega$ dir.

İspat. a) da verilen önerme aşikardır. b) yi görmek için, ön bilgilerde verilen Lebesgue örtü teoremi kullanılacaktır. Buna göre $0 \leq t \leq 1$ özelliğindeki her bir t için $B(\gamma(t); \delta)$ bir temel komşuluk ve $\delta < r_0$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı bulunmalıdır. t_i noktalarını $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ olmak üzere $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ için $\gamma(t) \in B(\gamma(t_j); \delta)$ olacak biçimde seçilsin.

Özel olarak $\gamma(0) = \alpha_0 \in \Delta_1 \equiv B(\gamma(t_1); \delta)$ olarak alınsın ve $g_1 : \Delta_1 \to G$, τ nun $g_1(\alpha_0) = a$ özelliğinde bir yerel ters olsun. Dikkat edilirse $\Delta_0 \cap \Delta_1$ üzerinde hipotez gereği $g_1 = g_0$ olur. Böylece (g_1, Δ_1), (g_0, Δ_0) ın bir devamı olur. Benzer olarak $\Delta_2 \equiv B(\gamma(t_1); \delta)$ ve $g_2 : \Delta_2 \to G$, τ nun $g_2(\gamma(t_1)) = g_1(\gamma(t_1))$ özelliğinde yerel tersi olsun. O halde $\Delta_1 \cap \Delta_2$ üzerinde $g_2 = g_1$ olur. Bu şekilde devam edilerek (g_0, Δ_0) ın γ boyunca her t için $g_t(\Delta_t) \subseteq G$ olacak biçimde analitik bir $\{ (g_t, \Delta_t) : 0 \le t \le 1 \}$devamı bulunmuş olur.

Şimdi ise (g_0, Δ_0) ın bir γ eğrisi boyunca her t için $g_t(\Delta_t) \subseteq G$ olacak biçimde herhangi bir $\{ (g_t, \Delta_t) : 0 \le t \le 1 \}$ devamını alalım ve F ile

$$F = \{ t \in [0, 1] : \text{Her } z \in \Delta_t \text{ için } \tau(g_t(z)) = z \}$$

kümesini gösterelim. $a = g_0(\alpha_0) = g_0(\tau(a))$ olduğundan $0 \in F$ olup $F \ne \phi$ dir. Bu küme açık aynı zamanda kapalı olduğundan $F = [0, 1]$ dir.

c) deki notasyonu kullanarak, d) önermesi gereği g_1 ve g_2 nin τ nun yerel tersleri olması $\omega_1 = \tau(g_1(\omega_1)) = \tau(g_2(\omega_2))$ olmasını gerektirir. Yerel ters bir tek olduğundan c) önermesi sağlanmış olur.

□

Şimdi asıl teoremimize geçebiliriz.

3.3.3. Teorem. Ω, tümleyeni $\mathbb{C}$ de en az iki nokta bulunduran $\mathbb{C}$ deki herhangi bir bölge ve $\alpha_0 \in \Omega$ ise bu takdirde $\tau(0) = \alpha_0$ ve $\tau'(0) > 0$ olacak biçimde bir tek $\tau : \mathbb{D} \to \Omega$ analitik örtü dönüşümü vardır.

İspat. a ve b, Ω nın tümleyeninde bulunan birbirinden farklı olsun ve Ω_0 ile $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \{ a, b \}$ kümesini gösterelim. 3.3.1 Yardımcı Teorem gereği $\tau_0(0) = \alpha_0$ ve $\tau_0'(0) > 0$ olacak biçimde bir $\tau_0 : \mathbb{D} \to \Omega_0$ analitik örtü dönüşümü vardır. Δ_0, α_0 ın Ω da kapsanan bir temel komşuluğu; $h_0 : \Delta_0 \to \mathbb{D}$ dönüşümü τ_0'ın $h_0(\alpha_0) = 0$ ve $h_0'(0) > 0$ özelliğindeki yerel tersi olsun. $\boldsymbol{F}$ ise aşağıdaki özellikleri sağlayan tüm $g : \Delta_0 \to \mathbb{D}$ analitik fonksiyonların ailesini göstersin : Bu durumda,

(a) $g(\alpha_0) = 0$ ve $g'(\alpha_0) > 0$

(b) Eğer $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ yolu $\gamma(0) = \alpha_0$ özelliğinde bir yol ise bu takdirde (g, Δ_0) ın γ boyunca her t için $g_t(\Delta_t) \subseteq G$ olacak biçimde analitik bir $\{ (g_t, \Delta_t) : 0 \leq t \leq 1 \}$devamı vardır.

(c) Eğer (g_1, Δ_1) ve (g_2, Δ_2); (g, Δ_0)'dan $\Delta_t \subseteq \Omega$ ve belli $\omega_1 \in \Delta_1$, $\omega_2 \in \Delta_2$ için $g_1(\omega_1) = g_2(\omega_2)$ özelliğindeki analitik devam yolu ile elde edilmiş $\omega_1 = \omega_2$ ve her $\omega \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ için $g_1(\omega) = g_2(\omega)$ dir.

(Bu üç özelliği (1) olarak belirtelim, daha sonra bu özellikleri kullanacağız)

Dikkat edilirse (b) ve (c) önermeleri 3.3.2. Yardımcı Teorem de G yerine $\mathbb{D}$ yazılması ile elde edilmiştir. Bu nedenle $h_0 \in \boldsymbol{F}$ ve böylece $\boldsymbol{F} \neq \phi$ dir. $\boldsymbol{F}$ deki her bir fonksiyon 1 ile sınırlı olduğundan $\boldsymbol{F}$ bir normal ailedir. Teoremdeki iddiayı doğrulamak için α_0 daki türevi en büyük olan bir fonksiyon bulunmalıdır.

O halde $\chi = \sup\{ g'(\alpha_0) : g \in \boldsymbol{F} \}$ olsun. $\boldsymbol{F}$ bir normal aile olduğundan $0 < \chi < \infty$ olur. $\{ h_k \} \subseteq \boldsymbol{F}$ fonksiyon dizisi $h'_k(\alpha_0) \rightarrow \chi$ özelliğinde olsun. $\boldsymbol{F}$ bir normal aile olduğundan Δ_0 ın kompakt alt kümeleri üzerinde $h_k \rightarrow h$ yakınsaması düzgün olacak biçimde var olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $h(\alpha_0) = 0$ ve $h'(\alpha_0) = \chi > 0$ olur. O halde (1) in (a) önermesi sağlanmış olur. (b) ve (c) şartlarının sağlandığı görülerek $h \in \boldsymbol{F}$ olduğu görülmüş olacak.

Buna göre; γ, Ω da $\gamma(0) = \alpha_0$ özelliğinde bir yol olsun. $\delta > 0$ sayısını $0 \leq t \leq 1$ için $B(\alpha_0; \delta) \subseteq \Delta_0$ ve $B(\gamma(t); \delta) \subseteq \Omega$ olacak biçimde seçelim. [0, 1] aralığının parçalanışı $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ için $\gamma(t) \in \Delta_j \equiv B(\gamma(t_j); \delta)$ özelliğinde olsun. Hipotez gereği her bir h_k fonksiyonu Δ_1 boyunca sınırsız analitik devamı olduğundan, Monodromy teoremi gereği $\Delta_1 \cap \Delta_0$ üzerinde tanımlı $h_{1k} = h$ özelliğinde analitik bir $h_{1k} : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonu vardır. Bu şekilde devam ederek $1 \leq j \leq n$ için $\Delta_j \cap \Delta_{j-1}$ üzerinde tanımlı $h_{jk} = h_{(j-1)k}$ özelliğinde analitik bir $h_{jk} : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonu vardır. j sayısını bir an için sabit tutalım. O halde $\{ h_{jk} : k \geq 1 \}$, Δ_j üzerinde tanımlı analitik fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisidir ve bu nedenle Δ_j'nin kompakt alt kümeleri üzerinde analitik bir $g_j : \Delta_j \rightarrow \mathbb{D}$ fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir alt dizisi vardır. Benzer tartışma sırasıyla uygulanarak $\Delta_j \cap \Delta_{j-1}$

üzerinde $g_j = g_{j-1}$ olacak biçimde g_j fonksiyonları elde edilebilir. O halde $\{ (g_j, \Delta_j) : 1 \leq j \leq n \}$, (h, Δ_0) ın analitik bir devamı olur ve böylece (b) sağlanmış olur.

Şimdi (1) in (c) önermesinde h yerine g fonksiyonunu yazalım. Önceki paragraftaki tartışma gereği analitik fonksiyonların $\{ (h_{1k}, \Delta_1) \}$ ve $\{ (h_{2k}, \Delta_2) \}$ dizileri $j = 1, 2$ için (h_{jk}, Δ_j), (h_k, Δ_0) ın bir devamı ve $k \to \infty$ yapıldığında Δ_j nin kompakt alt kümeleri üzerinde $h_{jk} \to g_j$ yakınsaması düzgün olacak biçimde vardır. O halde Hurwitz Teoremi gereği $j = 1, 2$ ve yeterince büyük k değerleri için $h_{1k}(\omega_{1k}) = g_1(\omega_1) = g_2(\omega_2) = h_{2k}(\omega_{2k})$ özelliğinde $\omega \in \Delta_j$ noktaları vardır. Ayrıca bu noktalar $k \to \infty$ yapıldığında $\omega_{jk} \to \omega_j$ olacak biçimde seçilebilir. $h_k \in \boldsymbol{F}$ ve böylece (1)(c) gereği $\Delta_1 \cap \Delta_2$ üzerinde her bir k için $\omega_{1k} = \omega_{2k}$ ve $h_{1k} = h_{2k}$ olur. O halde $\omega_1 = \omega_2$ ve $\Delta_1 \cap \Delta_2$ üzerinde $g_1 = g_2$ olur ki bu da (1)(c) nin sağlanması demektir. Buna göre $h \in \boldsymbol{F}$ olur.

Bundan böyle $h \in \boldsymbol{F}$ denildiğinde $h'(\alpha_0) = \chi$ özelliğindeki fonksiyon anlaşılacaktır. Teoremin ispatını tamamlamak için aşağıda verilecek olan iddiayı ispatlamak gereklidir:

3.3.4. İddia. Her bir $z \in \mathbb{D}$ için $z \in g_1(\Delta_1)$ olacak biçimde (h, Δ_0) ın analitik bir (g_1, Δ_1) devamı vardır.

Bir an için iddianın doğru olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde öyle bir $c \in \mathbb{C}$ sayısı vardır ki h nin G de c değerini almayan devamı yoktur. $h(\alpha_0) = 0$ olduğundan, $0 < | c | < 1$ olur. T Möbiüs dönüşümü $T(z) = \dfrac{c - z}{1 - \bar{c}z}$ biçiminde olsun. O halde T, $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ın $\mathbb{D} \setminus \{c\}$ üzerine $T(0) = c$ özelliğindeki bir konform denkliği olur. Böylece eğer $\mu(z) = T(z^2)$ olarak alınırsa $(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \mu)$, $\mathbb{D} \setminus \{c\}$ nin bir analitik örtü uzayı olur.

$a = \sqrt{c}$ olsun. O halde $\mu(a) = 0$ ve $\mu'(a) = \dfrac{-2a}{1 - |c|^2}$ olur. g dönüşümü μ dönüşümünün 0 ın $g(0) = a$ özelliğindeki bir komşuluğunda tanımlı bir yerel tersi olsun. 3.3.2. Yardımcı Teorem yi $(\mathbb{D} \setminus \{0\}, \mu)$ ye uygulayalım. Böylece g fonksiyonu 3.3.2.

Yardımcı Teorem in b), c) ve d) şartlarını sağlar. Burada $\alpha_0 = 0$, $G = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $\tau = \mu$ ve $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{c\}$ dir. O halde g o h tanımlı olup α_0 ın civarında analitik ve aynı zamanda $g(h(\alpha_0)) = a$ olur. Eğer (h_1, Δ_1), (h, Δ_0) ın $h_1(\Delta_1) \subseteq \mathbb{D}$ özelliğindeki herhangi bir analitik devamı ise $h_1(\Delta_1) \subseteq \mathbb{D} \setminus \{c\}$olur. 3.3.2. Yardımcı Teorem b) gereği g nin, $\mathbb{D} \setminus \{c\}$ de sınırsız analitik devamı vardır. O halde g o h ın da Ω da sınırsız analitik devamı olur.

g o $h \in \boldsymbol{F}$ olduğunu görmeye çalışıyoruz, ancak ortada iki tane eksiklik var. Birincisi $g(h(\alpha_0)) = a \neq 0$ ve ikincisi $(g \circ h)'(\alpha_0) > 0$ olmayabilir. Bu eksiklikleri aşağıdaki gibi gidereceğiz. M Möbiüs dönüşümü, $b = \dfrac{a}{|a|} = \dfrac{a}{\sqrt{c}}$ olmak üzere $M(z) = \dfrac{b(a-z)}{1-\bar{a}z}$ biçiminde olsun. $f = M$ o g o h olarak alalım. O halde $f(\alpha_0) = 0$ ve f, g o h gibi 3.3.2. Yardımcı Teorem b) ve c) şartlarını sağlar. Üstelik

$$\begin{aligned} f'(\alpha_0) &= M'(g(h(\alpha_0))\, g'(\, h(\alpha_0))\, \chi \\ &= M'(a)\ g'(0)\, \chi \end{aligned}$$

dir. O halde $z = \mu(g(z))$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} 1 &= \mu'(g(0))\ g'(0) \\ &= \frac{-2a}{1-|c|^2}\ g'(0) \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$g'(0) = \frac{-2a}{1-|c|^2}$$

olur. Diğer yandan

$$M'(\mathrm{z}) = \frac{b(1-\bar{a}z) + \bar{a}b(a-z)}{(1-\bar{a}z)^2}$$

olup

$$M'(a) = \frac{b(1+|a|)}{1-|a|}$$

olarak bulunur. O halde

$$f'(\alpha_0) = M'(a)\ g'(0)\, \chi$$

$$= \frac{b(1+|a|)}{1-|a|}\,\frac{-2a}{1-|c|^2}$$

$$= \frac{1+|c|}{2\sqrt{|c|}}\chi > 0$$

olur. Böylece $f \in \boldsymbol{F}$ olduğu görüldü. Ancak diğer yandan $f \in \boldsymbol{F}$ olması aynı zamanda $f'(\alpha_0) > \chi$ olduğunu gösterir ki bu da χ nın tanımı ile çelişir. O halde 3.3.4. İddia sağlanmış olur.

Şimdi τ dönüşümünü $\mathbb{D}$ nin Ω üzerine bir örtü dönüşümü olarak tanımlayalım. Yukarıda olduğu gibi $h \in \boldsymbol{F}$ fonksiyonu $h'(\alpha_0) = \chi$ olacak biçimde verilsin. Eğer $z \in \mathbb{D}$ ise 3.3.4. İddia gereği h nin $z \in h_1(\Delta_1)$ özelliğinde analitik bir (h_1, Δ_1) devamı vardır. $\omega_1 \in \Delta_1$ için $z = h_1(\omega_1)$ diyelim. Eğer (h_2, Δ_2); h nin belli bir $\omega_2 \in \Delta_2$ için $z = h_2(\omega_2)$ özelliğinde diğer bir devamı ise (1)(c) gereği $\omega_1 = \omega_2$ olup $\Delta_1 \cap \Delta_2$ üzerinde $h_1 = h_2$ olur. (1)(c) ayrıca h_1 fonksiyonunun Δ_1 üzerinde bire-bir ve analitik olduğunu gösterir. Dolayısıyla τ dönüşümü $U = h_1(\Delta_1)$ üzerinde $\tau = (h_1 \mid \Delta_1)^{-1}$ olarak tanımlayabiliriz. z keyfi olduğundan τ dönüşümü $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlanmış olur. τ dönüşümünün tanımı gereği analitik olup $\tau(\mathbb{D}) = \Omega$ olur. τ dönüşümü yerel olarak bire-bir ve analitik olduğundan her $z \in \mathbb{D}$ için $\tau'(z) \neq 0$ olur.

İspatın tamamlanabilmesi için geriye sadece τ dönüşümünün bir örtü dönüşümü olduğunu görmek kaldı. Buna göre $\omega \in \Omega$ belli bir nokta olsun. τ dönüşümünün bir örtü dönüşümü olduğunu görebilmek için ω nın öyle bir Δ komşuluğunu bulmalıyız ki $\tau^{-1}(\Delta)$ nın her bir bileşeni τ tarafından homeomorf olarak Δ üzerine resmedilmelidir. Δ yı bulmak için Δ, ω merkezli bir disk olmak üzere h nin herhangi bir (h_1, Δ) analitik devamını göz önüne alalım. (h_2, Δ_2) nin h nin $\omega \in \Delta_2$ özelliğindeki diğer bir devamı olduğunu kabul edelim. (1)(b) ye göre h_2 nin Δ nın her bir noktasında bir devamı mutlaka vardır. O halde Monodromy Teoremi gereği h_2 fonksiyonu $\Delta_2 \cup \Delta$ üzerinde tanımlı analitik bir fonksiyona genişletebilir. Böylece h_2 fonksiyonunun Δ üzerinde tanımlı olduğunu kabul edebiliriz yani $\omega \in \Delta_2$ olmak üzere (h, Δ_0) ın her bir (h_2, Δ_2) devamının $\Delta \subseteq \Delta_2$

özelliğinde olduğunu kabul edebiliriz. $\boldsymbol{H}_{\omega} = \{ (h_i, \Delta) : i \in I \}$ kümesi (h, Δ_0) ın Δ ya tüm farklı analitik devamlarının ailesi olsun (Dikkat edilirse burada $\boldsymbol{H}_{\omega}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını bilmiyoruz, ancak bunu aşağıda göreceğiz). τ dönüşümünün tanımından hareketle

$$\tau^{-1}(\Delta) = \bigcup_{i \in I} h_i(\Delta)$$

olduğu bulunur. Ancak (1)c) gereği $i \neq j$ için $h_i(\Delta) \cap h_j(\Delta) = \phi$ dir. O halde $\{ h_i(\Delta) : i \in I \}$ kümesi $\tau^{-1}(\Delta)$ nın bileşenleridir. Böylece I sayılabilir bir küme olur. $\tau \mid h_i = (h_1 \mid \Delta_1)^{-1}$ olduğundan aşikar olarak τ dönüşümü $h_i(\Delta)$ yı Δ üzerine homeomorf olarak resmeder. Böylece ispatın varlık kısmı tamamlanmış olur.

Teklik kısmı ise daha önceki konularda ele alınmış olup, evrensel analitik örtü uzayının varlığının tekliğini gerektirdiği görülmüştür. □

3.3.5. Sonuç. G bölgesi $\mathbb{C}$ de 0 ı bulunduran bir has bölge olsun. Eğer f, G nin kendi üzerine $f(0) = 0$ ve $f'(0) > 0$ özelliğinde bir konform denkliği ise bu takdirde her $z \in G$ için $f(z) = z$ olur.

İspat. Eğer G nin tümleyeni en az iki nokta bulunduruyor ise $\tau : \mathbb{D} \to G$ dönüşümü $\tau(0) = 0$ ve $\tau'(0) > 0$ özelliğinde evrensel analitik örtü dönüşümü olsun. O halde $f \circ \tau : \mathbb{D} \to G$ dönüşümü de $(f \circ \tau)(0) = 0$ ve $(f \circ \tau)'(0) > 0$ özelliğinde analitik bir örtü dönüşümüdür. Böylece $f \circ \tau = \tau$ olur ki bu da her $z \in \mathbb{D}$ için $f(\tau(z)) = \tau(z)$ olduğunu gösterir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Eğer G nin tümleyeninde bir nokta bulunuyor olması halinde ortaya,3.3.3. Teoremin hipotezi ile çelişki çıkar.

KAYNAKLAR

BAŞKAN, T. 1998. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Vipaş A. Ş. No:14. Bursa. 360 s.

BAŞKAN, T. ve BİZİM, O. ve CANGÜL, İ. N. 2000. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş. Vipaş A. Ş. No:35. Bursa. 203 s.

BAYRAKTAR, M. 1991. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Atatürk Üniversitesi Basımevi. No:650. Erzurum. 275 s.

BROWN, R. 1988. Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and Fundamental Groupoid. Ellis Horwood Limited.460p.

CONWAY, J. B. 1995. Functions of One Complex Variable I. Springer-Verlag New York Inc.316 p.

CONWAY, J. B. 1995. Functions of One Complex Variable II. Springer-Verlag New York Inc.394 p.

JONES, G. A. ve SINGERMAN, D. 1987. Complex Funtions an Algebraic and Viewpoint. Cambridge University Press. 342 p.

MASSEY, W. A. 1991. A Basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag New York Inc. 428 p.

SCHOENEBERG, B. 1974. Elliptic Modular Functions an Introduction. Springer-Verlag Heidelberg Berlin New York. 233 p.

SPAINER, H. E. Algebraic Topology. Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd. 582 p.

ULUÇAY, C. 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri. KTÜ Temel Bilimler Fakültesi Yayınları. Trabzon. 736 s.

YILDIZ, I. 2004. On Extension of the Modular Transformations Over the Modular Group by Reflection. Applied Mathematics and Computation. 153 :111-116

İNDEKS

ÖZGEÇMİŞ

15.07.1981 tarihinde Bilecik'te doğan İlker İNAM; ilk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladıktan sonra 1999 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2003 yılında lisans öğrenimini tamamlamasının ardından yine aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2005 yılının Ocak ayından beri araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten; her türlü yardım ve desteği esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mümin YAMANKARADENİZ'e, yüksek lisans öğrenimim boyunca bana her konuda destek olan Doç. Dr. Osman BİZİM ve Doç.Dr. İsmail Naci CANGÜL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.